

Teorema [di de l'Hospital, *si pronuncia
del'opital*]: Siano f e g due funzioni definite
 su $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, siano derivabili su tutto (a, b) e
 siano t.c. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ [$= \infty$] e
 $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$; inoltre, $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$
 (dove $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), allora vale

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

L' enunciato si estende anche a

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

e anche ai casi in cui $a^+ = -\infty$ e $b^- = +\infty$.

Dim.: Ci limitiamo al caso del limite $x \rightarrow a^+$ con $a \in \mathbb{R}$ e a una forma di indeterminazione $0/0$. Ricordiamo che per il limite $x \rightarrow a^+$ occorre studiare qualsiasi successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in (a, b) \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

Si ricordi che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n)$.

Introduciamo $\forall n$ la funzione ausiliaria

$$h_n(x) = \begin{cases} \underbrace{f(x_n)}_{\text{coefficienti costanti}} g(x) - \underbrace{g(x_n)}_{\text{coefficienti costanti}} f(x) & \text{se } x \in [a, x_n] \\ 0 & \text{quando } x = a \end{cases}$$

Si osserva che $\lim_{x \rightarrow a^+} h_n(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x_n)g(x) - g(x_n)f(x)] = 0$.

Allora $h_n(x) \in \mathcal{C}([a, x_n])$ e $h_n(x)$ è derivabile su tutto (a, x_n) .

Applichiamo il teorema di Lagrange a $h_n(x)$

in $[a, x_n] \Rightarrow \exists c_n \in (a, x_n) \text{ t.c.}$

$$h'_n(c_n) = \frac{h_n(x_n) - h_n(a)}{x_n - a} = 0 \text{ perché } h_n(a) = 0$$

e anche $h_n(x_n) = f(x_n)g(x_n) -$

Ne segue che in $x = c_n \Rightarrow h'(c_n) = f(x_n)g'(c_n) - g(x_n)f'(c_n) = 0$

$$\Rightarrow f(x_n)g'(c_n) = g(x_n)f'(c_n) \Rightarrow \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

con $c_n \in (a, x_n)$

Siccome $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a^+ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a^+$ (stiamo applicando il teorema del confronto, poiché $a < c_n < x_n$).

Sostituire $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x_u)}{g(x_u)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f'(c_u)}{g'(c_u)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \text{C.V.D.}$

Esempio: Limiti notevoli

Infatti, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^d - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d(1+x)^{d-1}}{1} = d.$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1.$$

Gerarchia degli infiniti (verifica di alcune relazioni con la regola di de l'Hospital).

Si osserva preliminarmente che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{rx}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{r e^{rx}} = 0 \quad (\text{con } r \in \mathbb{R}_+)$$

Si calcoli che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(\frac{\beta}{\alpha})^\alpha x} \right)^\alpha = 0^\alpha \quad \left(\begin{array}{l} \text{perché} \\ \text{abbiamo} \\ \text{applicato} \end{array} \right)$$

il lim. prec. con $r = \frac{\beta}{\alpha}$

Inoltre, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} =$, poniamo $t = \log x$,

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{e^{\beta t}} = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ -$$

Es. 63 pag. 244

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \log x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x + 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

Es. 62 pag. 244

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x} = \frac{1}{6},$$

dove l'ultimo passaggio difficile per i denominatori abbiamo fatto il seguente calcolo:

$$D(2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x) =$$

$$\begin{aligned} &= D(2 \sin x) + D(4x \cos x) - D(x^2 \sin x) = \\ &= 2 \cos x + D(4x) \cdot \cos x + 4x \cdot D(\cos x) - D(x^2) \sin x - x^2 D(\sin x) \\ &= 2 \cos x + 4 \cos x - 4x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x = \\ &= 6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x \end{aligned}$$

Regola/teorema di de l'Hospital precauzioni nell'uso

Esempio 4.9 (caso in cui il limite $\exists$, ma
 $\nexists$ il limite del rapporto) -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \text{ che } \nexists$$

Non segue che $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$

Esercizio 67

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Provare in un altro modo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + 1/x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

Teorema (di Taylor-Maclaurin): $f \in \mathcal{C}^n((a,b))$
(f derivabile n volte con tutte le derivate continue)
allora $\forall x, x_0 \in (a,b)$ vale la relazione

$$f(x) = \left[\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x-x_0)^j \right] + o((x-x_0)^n)$$

Si legge
etc.

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0), \quad f^{(1)}(x_0) = f'(x_0), \quad f^{(2)}(x_0) = f''(x_0)$$