

Derivate di funzioni inverse.



Se $y = y(x)$ è invertibile $\Rightarrow x = x(y)$

$$\Downarrow$$
$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Downarrow$$
$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'}$$

Teorema: Sia $y = f(x)$ con $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ t. c. $f'(x) \neq 0 \forall x \in D$
 f è invertibile e
allora la funzione inversa $g(y) = f^{-1}(y)$ è derivabile in
ogni $y \in f(D)$ con derivata $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{y=f(x)}$.

Dici (solo 2^a parte, cioè determiniamo $g'(y)$ con $y = f(x)$).

Deriviamo $g \circ f(x) = x \Rightarrow (g \circ f)'(x) = 1$, possiamo calcolare

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ e uguagliamo ottenendo

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow g'(f(x)) = 1/f'(x), \text{ dove}$$

$g'(f(x))$ è esattamente la derivata della funzione
inversa $g(y) = f^{-1}(y)$ valutata in corrisp. a $y = f(x)$. C.V.D.

Esempio 3.14: Siano $f(x) = \tan(x)$ e $g(y) = \arctan(y)$

cioè $g = f^{-1}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} D \arctan(y) &= \frac{1}{f'(x)|_{y=f(x)}} = \frac{1}{\tan'(x)|_{y=\tan(x)}} = \text{dove } D \tan(x) = D \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \Big|_{y=\tan(x)} = \frac{1}{1 + y^2} \end{aligned}$$

$\boxed{\arctan'(x) = 1/(1+x^2)}$

Esempio 3.15: Siano $f(x) = \sin(x)$ e $f(y) = \arcsin(y)$

$$\text{Calcoliamo } D \arcsin(y) = \frac{1}{\sin'(x) \Big|_{y=\sin x}} = \frac{1}{\cos(x) \Big|_{y=\sin x}},$$

Osserviamo che $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$ e ricordiamo che $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow$ Se $y = \sin x$ e quindi $x = \arcsin(y) \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x},$



$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x} \Big|_{y=\sin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

$$D \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Esempio 3.16: Verificare che
Per esercizio —

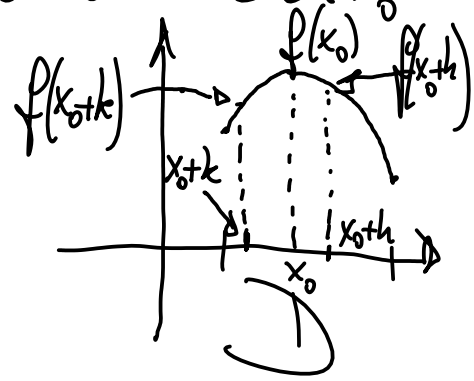
$$D \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Def.: Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che $x_0 \in D$ è un p.to di massimo [minimo] locale e $M = f(x_0)$ è un massimo [minimo] locale se $\exists \delta > 0$ t.c. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ e $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha che $f(x) \leq M = f(x_0)$ [$f(x) \geq M = f(x_0)$].

Def.: un p.to che è di massimo o di minimo ^{locale} si dice p.to di estremo locale.

Teorema [di Fermat = si dice di Fermat']: Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un p.to di estremo locale t.c. f sia derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$.

Dim.: Per fissare le idee sia $f(x_0)$ massimo locale.



Osserviamo che $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$, perché $f(x_0+h) \leq f(x_0)$

$\Rightarrow$ numeratore ≤ 0 e denominatore $> 0 \Rightarrow$ il rapporto è ≤ 0
e quindi anche il limite sarà ≤ 0 per il teorema della permanenza del segno.

Osserviamo che $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ (ripetendo il

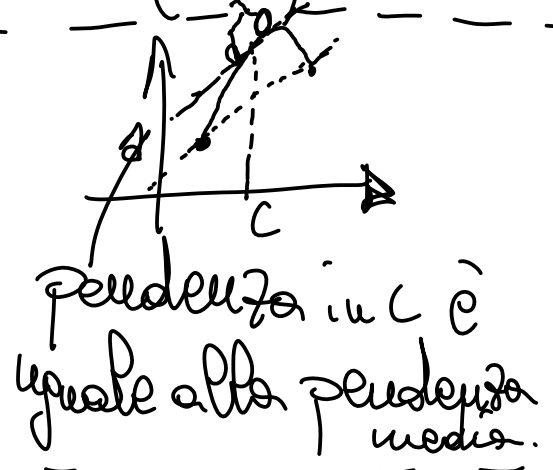
ragionamento precedente). Ne segue che $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$
e $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$. C.U.D.

Strategia per determinare i p.t. di estremo locale
di un grafico: si risolve l'eq. $\boxed{f'(x) = 0}$ una sol. di $f'(x)$ si
dice p.t. stazionario.

Teorema [di Lagrange] *si pronuncia come "beige" (cioè il colore con cui si scriveva!)*: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) (si scrive anche che $f \in \mathcal{C}([a, b])$ e $f \in \mathcal{C}^1((a, b))$) allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

grafico

Come corollario si ricava il!

Teorema [di Rolle]: nelle stesse ipotesi del teorema di Lagrange, quando $f(b) = f(a)$, allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

Dim (del th. di Lagrange). Si ricordi che la retta che passa per i p.ti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ ha come espressione

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Si introduce una funzione ausiliaria

$$w(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right],$$

che gode della seguente proprietà: $w(a) = w(b) = 0$.

Osserviamo che $w \in \mathcal{C}([a, b]) \Rightarrow w[a, b] = [m, M]$.

Distinguiamo vari casi. $[m, M] = \{0\} \Rightarrow \forall c \in (a, b)$ abbiamo che $w'(c) = Dw = D(0) = 0$, quindi abbiamo trovato c che soddisfa l'enunciato.

Gli altri casi sono t.c. - $m < 0 = M$, $m = 0 < M$, $m < 0 < M$.

Ne segue che esiste un p.to c che $\in (a, b)$ ed è un p.to di estremo locale. (Esempio: nel caso $m = 0 < M$ allora $\exists$ t.c.

$c \in [a, b]$ e $w(c) = M > 0$, siccome $w(a) = w(b) = 0 \Rightarrow c \neq a, c \neq b \Rightarrow c \in (a, b)$). Applicando il teorema di Fermat alla funzione w e al p.to di estremo locale c si ha che $w'(c) = 0$.

$$\text{Siccome } w'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corollario: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. - $f'(x) > 0$ [C.V.D. $f'(x) < 0$]
 $\forall x \in (a, b)$ allora f è ~~monotona~~ strettamente crescente
[decrecente] -

Dim. $\forall x_1 < x_2$ deve avvenire che $f(x_1) < f(x_2)$.

Infatti, applichiamo Lagrange a f su $[x_1, x_2]$,

allora $\exists c \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ t.c.

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c) \cdot (x_1 - x_2) < 0$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) -$$

perché abbiamo
 $f'(x) > 0$ nell'ipotesi