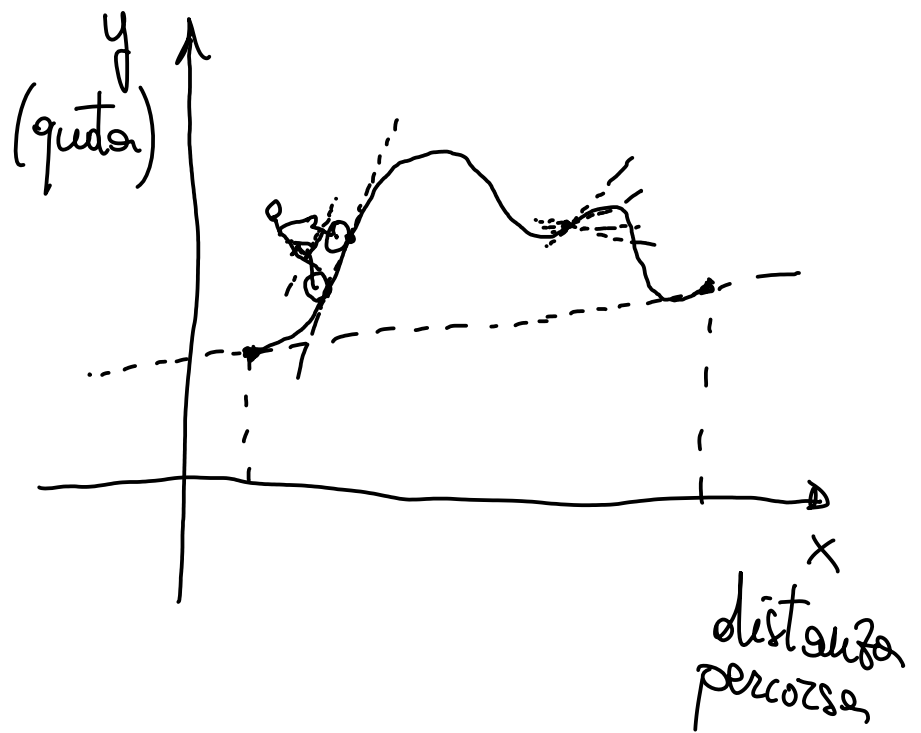


Definizione di coefficiente
angolare della retta
tangente è dato da

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Def. (di grafico di una funzione f): Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Chiamiamo grafico di f l'insieme

$$\{(x, f(x)), x \in D\}.$$

Def.: diciamo che $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ è la retta

tangente al grafico di f in x_0 , quando f è derivabile in x_0 -

Derivate di funzioni elementari

- Sia $f(x) = x^d$ (se $d \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
se $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+$)

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^d - x^d}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x^d \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^d - 1}{\frac{h}{x}} =$$

$D x^d = d x^{d-1}$

$$= x^d \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^d - 1}{\frac{h}{x}} = d x^d \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{h}{x}} = d x^{d-1}$$

- Sia $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h}$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \frac{\cosh - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \frac{\sinh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot (-1) \cdot \frac{h^2/2}{h} + \cos x = \cos x$$

per esercizio!

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} =$$

$$D e^x = e^x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$$f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

$$D \log x = 1/x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/x}{1} = 1/x$$

Teorema: Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 allora
 f è continua in x_0 .

$$\text{Dim.} \therefore \text{Si calcoli } \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ = 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =, \text{ poich\'e } h = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + h, = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x_0 + h) - f(x_0) \right] + f(x_0) \\ = f(x_0). \text{ Siccome } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ cos\'e } f \text{ \u00e9 continua in } x_0. \\ \text{C.U.D.}$$

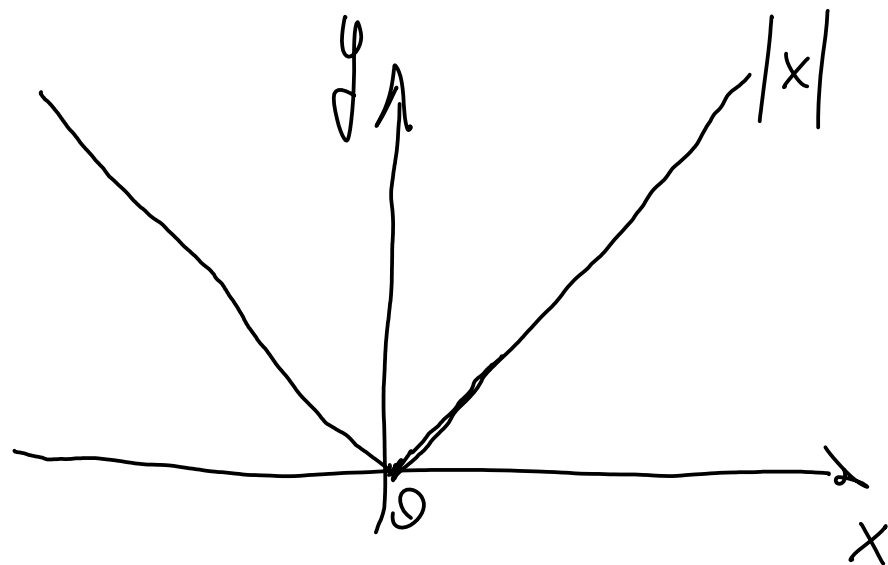
Def.: Si dice che il grafico di $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ha un punto angoloso in x_0 se $\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$ e $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$,

con $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$.

Esempio: $y = |x| = f(x)$

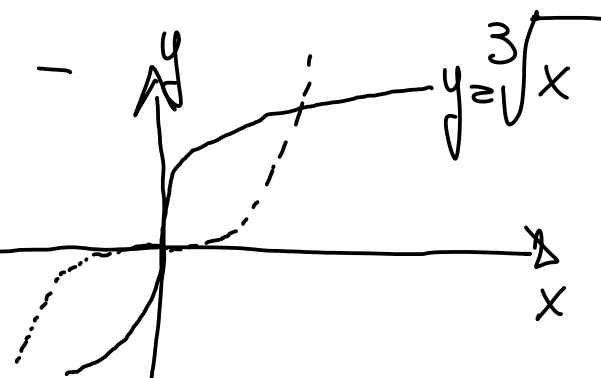
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1 = f'_-(0)$$

$$f'_+(0) = 1$$



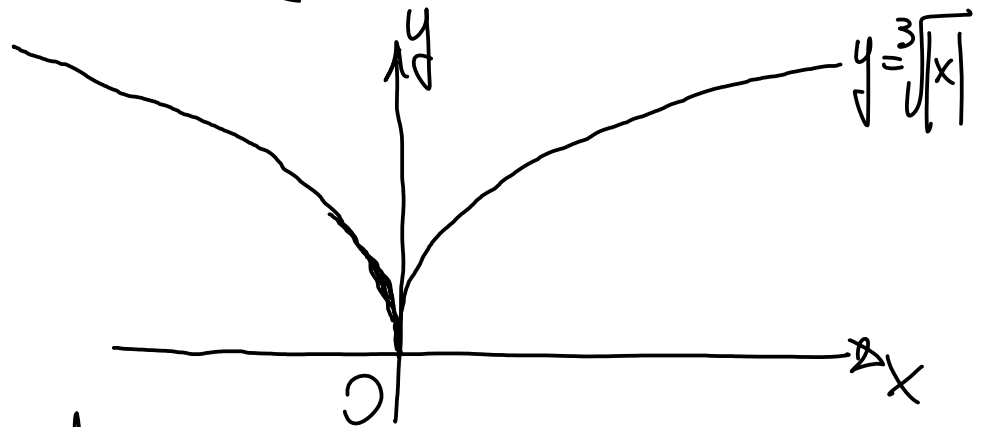
Def.: diciamo che $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ha un p.to di
flesso con tangente verticale in $x_0 \in D$ se f è
continua in x_0 e $f'(x_0) = \pm \infty$.

Esempio: $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$



Def.: Si dice che il grafico di $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ammette una cuspide in $x_0 \in D$ se f è continua in x_0 e $f'_+(x_0) = +\infty$ con $f'_-(x_0) = -\infty$ oppure $f'_+(x_0) = -\infty$ con $f'_-(x_0) = +\infty$.

Esempio: $y = f(x) = \sqrt[3]{|x|}$



Regole di calcolo per le derivate

Teorema: Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. sono derivabili in $x_0 \in D$, allora $D(f(x) \pm g(x))|_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

$$D(f(x) \cdot g(x)) \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \Big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{se } g(x_0) \neq 0$$

A modo di esercizio, verifichiamo la regola per il prodotto:

$$\begin{aligned} D(f(x) \cdot g(x)) \Big|_{x=x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0+h) \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right] \end{aligned}$$

$$= f'(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) + f(x_0) g'(x_0) = f'(x_0) f(x_0) + f(x_0) g'(x_0).$$

Teorema [regola della catena]: Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$,
 $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$ con $D' \supseteq f(D)$, tali che f è derivabile
 in $x_0 \in D$ e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
 derivabile in x_0 e $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Esempio: Verificare che $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ è soluzione
 dell'eq. per l'oscillatore armonico, cioè
 $m \ddot{x} = -kx$, dove A e φ sono costanti e
 $\omega = \sqrt{k/m}$.

Infatti, si calcoli $\dot{x} = -A \sin(\omega t + \varphi) \cdot \omega$
 e $\ddot{x} = \frac{d}{dt} [-A\omega \sin(\omega t + \varphi)] = -A\omega \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \varphi)$

Suggerimento:
 si ponga $f(t) = \omega t + \varphi$
 e $g(\vartheta) = A \cos \vartheta$

$$= -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 [A \cos(\omega t + \varphi)] = -\omega^2 x$$

$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$, siccome $\omega^2 = k/m$, allora

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x \Rightarrow m \ddot{x} = -kx.$$

Esempio: Si verifichi che $x(t) = C e^{\lambda t}$ è soluzione
 dell'eq. $\ddot{x} = \lambda x$.

Infatti, $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} C e^{\lambda t} = C \frac{d}{dt} e^{\lambda t} = C \left(\frac{d}{dx} e^x \Big|_{x=\lambda t} \right) \cdot \frac{d(\lambda t)}{dt} = \lambda C e^{\lambda t}$
 $= \lambda x$