

- Limiti notevoli (già fatto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1/2 ; \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2 -}\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}$$

Def. Diciamo che $f(x)$ e $g(x)$ sono asintotiche
 per $x \rightarrow c \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ quando
 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si scrive: $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow c$.

Esempi di riscrittura dei limiti notevoli:

$$\sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \text{ per } x \rightarrow 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \text{ per } x \rightarrow 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$$

Def.: si dice che $\varepsilon(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow c \in \mathbb{R}^*$
 quando $\lim_{x \rightarrow c} \varepsilon(x) = 0$.

Tabella dei limiti notevoli con la relazione di asintotico a un infinitesimo

$$\sin(\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$

$$1 - \cos(\varepsilon(x)) \sim \frac{\varepsilon^2(x)}{2}$$

$$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)$$

$$\log(1 + \varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$

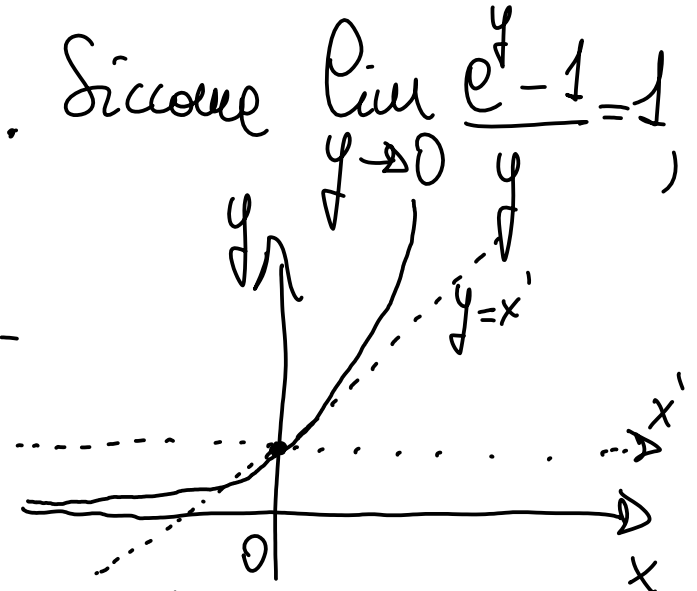
$$(1 + \varepsilon(x))^\alpha - 1 \sim \alpha \varepsilon(x)$$

dove $\varepsilon(x)$ infinitesimo per $x \rightarrow c$
($\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} \varepsilon(x) = 0$)

Ciascuna di queste relazioni si verifica con il cambio di variabile nel limite; esempio

Per verificare $e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)$ quando $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$
 dobbiamo mostrare $\lim_{x \rightarrow c} \frac{e^{\varepsilon(x)} - 1}{\varepsilon(x)} = 1$. Infatti,

Poniamo $y = \varepsilon(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} y = 0$. Siccome $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
 allora $\lim_{x \rightarrow c} \frac{e^{\varepsilon(x)} - 1}{\varepsilon(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$.



Strategia: quando abbiamo il limite del
 rapporto di due polinomi è conveniente indivi-
 duare i termini dominanti.

Esempio (generale): $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $P(x) = \sum_{j=0}^{n=\deg(P)} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$
 con $a_n \neq 0$.

e $Q(x) = \sum_{j=0}^{m=\deg(Q)} b_j x^j$ con $b_m \neq 0$, allora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)}{b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \dots + \frac{b_0}{b_m x^m} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \text{Sign}(a_n/b_m) \cdot (\pm\infty) & \text{quando } n > m \\ a_n/b_m & \text{quando } n = m \\ 0 & \text{quando } n < m \end{cases}$$

Esempio 6.5: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2/3}}{x^2 + 3\sqrt[3]{x} + x} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2/3}}{x^2 + 3x^{1/3} + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2/3}}{x^{1/3}(3 + x^{5/3} + x^{2/3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/3}}{3 + x^{5/3} + x^{2/3}}$$

$= 0$ - Alternativamente, si poteva osservare che $x^2 + 3\sqrt[3]{x} + x \sim 3x^{1/3}$ per $x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2/3}}{x^2 + 3\sqrt[3]{x} + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2/3}}{3x^{1/3}} = \frac{0}{3} = 0$

dove abbiamo sfruttato che se $f(x) \sim h(x)$ per $x \rightarrow c$,
 allora $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{h(x)}$

se quest'ultimo esiste.

Esempio 6.7

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2} - 1}$, poniamo $y = x-1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} y = 0$,

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{e^{3y^2} - 1}, \text{ osserviamo che } 3y^2 \rightarrow 0 \text{ per } y \rightarrow 0 \Rightarrow e^{3y^2} - 1 \sim 3y^2 \text{ per } y \rightarrow 0,$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{3y^2} = 1/3.$$

Esempio 6.8

Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} - x \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}} - 1 \right),$$

osservo che $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$, quindi, =

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left[\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right)^{1/3} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cancel{x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\cancel{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cancel{x^2} \cdot 2} \right) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 = 2/3 -$$

Proposizione (gerarchia degli infiniti):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = 0 \quad \forall a > 1, a > 0, b > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{b^x} = 0 \quad \forall b > 0, b > 1 -$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{\beta} (-\log_a y)^{\alpha} = , \text{ se pose } x = 1/y, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^{\alpha}}{x^{\beta}} = 0$$

$\forall \alpha > 1, \alpha > 0, \beta > 0$

Fare l'es. 30

Es. 31 Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \left(\frac{x^2+3}{x^2+2} \right)}$

Studiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x^2+3}{x^2+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x^2+2}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+2} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x^2+2} \right) = , \text{ osservando che } \frac{1}{x^2+2} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty,$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+2} \right)^x = e^0 = 1.$