

Teorema [l'immagine di un chiuso secondo una funz. continua è un chiuso]: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funz. continua allora

$$f([a, b]) = [m, M] \quad \text{con } m, M \in \mathbb{R}$$

È l'insieme
delle funz.
continue
su $[a, b]$

Condensa in un solo enunciato i due seguenti.

Teorema [di Weierstrass]: Sia $f \in \mathcal{C}([a, b])$; $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ che
sono p.t. di minimo e di massimo per f , cioè $f(x) \geq f(x_1) = m$
e $f(x) \leq f(x_2) = M \quad \forall x \in [a, b]$.

Teorema [dei valori intermedi]: Sia $f \in \mathcal{C}([a, b])$, siano m e M il
valore minimo e quello massimo di $f([a, b])$, allora $\forall \lambda \in [m, M]$
 $\exists x \in [a, b]$ t.c. $f(x) = \lambda$.

Def.: si dice che una proprietà vale definitivamente per $x \rightarrow \infty$

(dove $c \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$) quando esse vale in un intervallo aperto che contiene il punto c , escluso al più c .

Esempio: $x+4 > 0$ definitivamente per $x \rightarrow 5$, perché $x+4 > 0$
 $\forall x \in (4, 6)$.

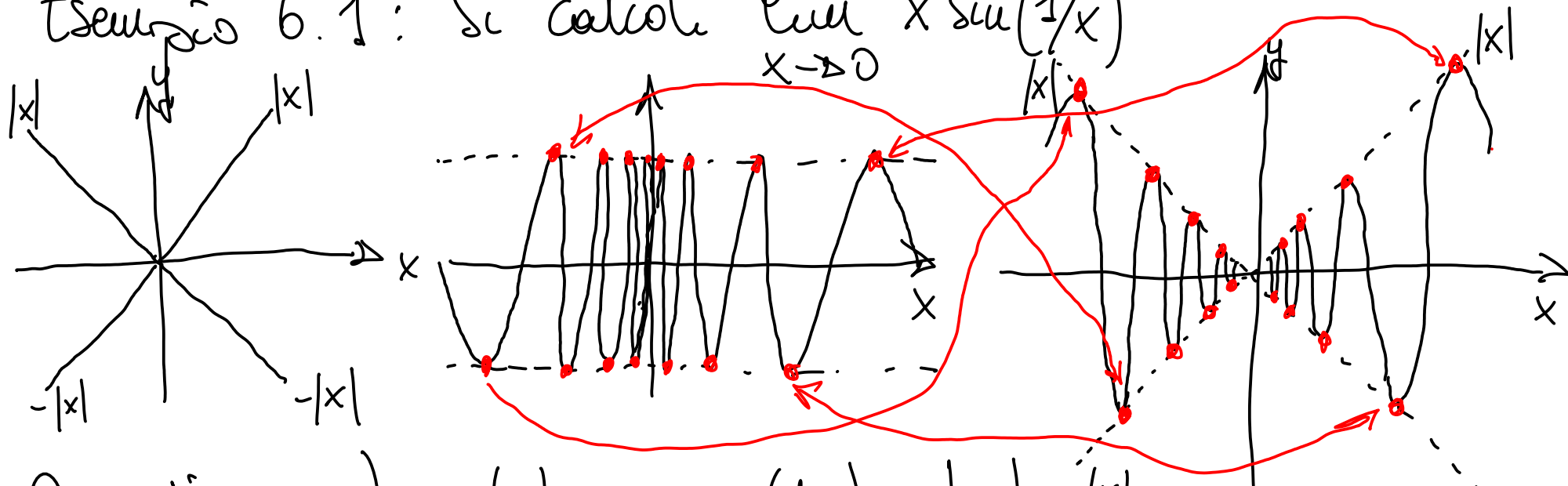
$\arctan x > \frac{\pi}{4}$ per $x \rightarrow +\infty$, perché $\arctan x > \frac{\pi}{4}$ per $x \in (1, +\infty)$.

Teorema (del confronto): Siano $f(x), g(x), h(x)$ t.c. e definitivamente verificato che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per $x \rightarrow c$ e
 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$, allora $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l$.

Corollario: Siano $f(x)$ e $g(x)$ t.c. vale definitivamente
 $|f(x)| \leq g(x)$ per $x \rightarrow c$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, allora
 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

Dim.: Si applichi il teorema del confronto alla disp. $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

Esempio 6.1: si calcoli $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x)$



Osserviamo che $-|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x|$

⇒ per il collaudo al teorema del confronto, applicato con $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$ e $g(x) = |x|$, allora

siccome $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$.

Si può applicare la stessa strategia a tutte le situazioni del tipo $g(x) \cdot h(x)$ con $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ e $h(x)$ è defi-

definitivamente limitato per $x \rightarrow c$.

Teorema (della permanenza del segno): Sia $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$
con $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \rightarrow c$, allora $l \geq 0$.

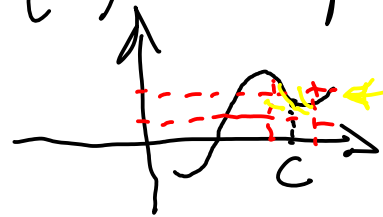
Non può essere rafforzato nel senso che se $f(x) > 0 \not\Rightarrow l > 0$

Esempio $f(x) = x^2$, allora $f(x) > 0 \forall x \neq 0$ eppure $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Teorema (della permanenza del segno, nella II forma):

Sia $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l > 0$, allora $f(x) > 0$ definitivamente

per $x \rightarrow c$.



Il rettangolo
giallo ha ordina-
te positive.

Teorema: Siano $f(x)$ e $g(x)$ t.c. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1$ e

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l_2$ con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \text{ se } l_2 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = l_1^{l_2} \text{ se } l_1 > 0.$$

Teorema (di aritmetizzazione parziale di ∞ per i limiti di funzione): Siano $f(x)$ e $g(x)$ t.c. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1$ e

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l_2$, allora

se $l_1 = +\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R} \cup +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow c} f(x) + g(x) = +\infty$

se $l_1 = +\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, " $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

se $\ell_1 = +\infty$ e $\ell_2 \in \mathbb{R}_+$, " $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = +\infty$
 se $\ell_1 \in \mathbb{R}_+$, $\ell_2 = 0$ e $g(x) > 0$ definitivamente $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
 se $\ell_1 \in \mathbb{R}$, $\ell_2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Propositione [cambio di variabile nel limite]: sia $g \circ f$ t.c.
 è ben definita in un intorno di x_0 , con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
 e sia $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell$.

Esempio: $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$, osservo che $e^{1/x} = g(f(x))$ dove $f(x) = 1/x$
 $g(y) = e^y$ e osservo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$,
 $\Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$.

Limite notevole di $\frac{\sin x}{x}$ per $x \rightarrow 0$ $\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right]$

Dal grafico qui a dx. segue che

$$S'_{\triangle OPC} \leq S'_{\text{Settore circolare}} \leq S'_{\triangle OCT}$$

triangolo

Settore circolare

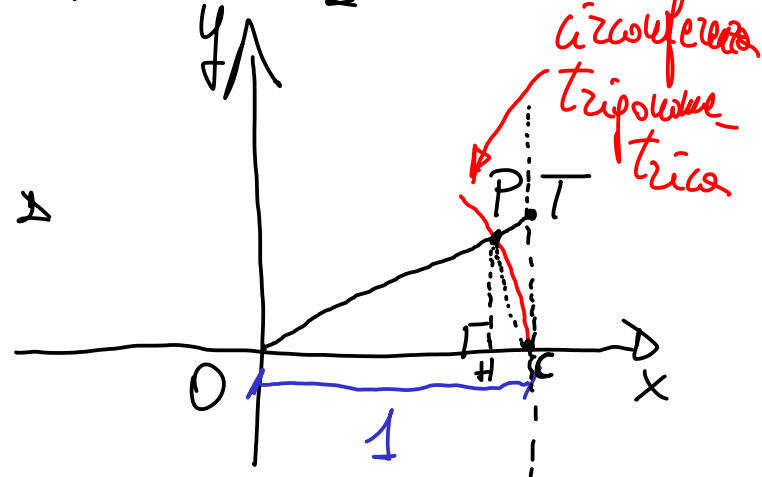
triangolo

dove S' sta per "superficie"

$$\Rightarrow \frac{\overline{OC} \cdot \overline{PH}}{2} = \frac{1 \cdot \sin x}{2} \leq \frac{x \cdot 1^2}{2} \leq \frac{\overline{OC} \cdot \overline{TC}}{2} = \frac{1 \cdot \tan(x)}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x \leq x \leq \tan(x) \quad \left(\begin{array}{l} \text{questa disug. vale con } x \text{ positivo} \\ \text{e vale con } > \text{ anziché } \leq \text{ per } x \text{ negativo} \end{array} \right)$$

$$\text{Dividiamo per } \sin x \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \left(\begin{array}{l} \text{questa vale sia} \\ \text{per } x \text{ positivo che} \\ \text{per } x < 0 \end{array} \right)$$



"Ribaltiamo": $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

Per il teorema del confronto, allora,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ perché } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 -$$