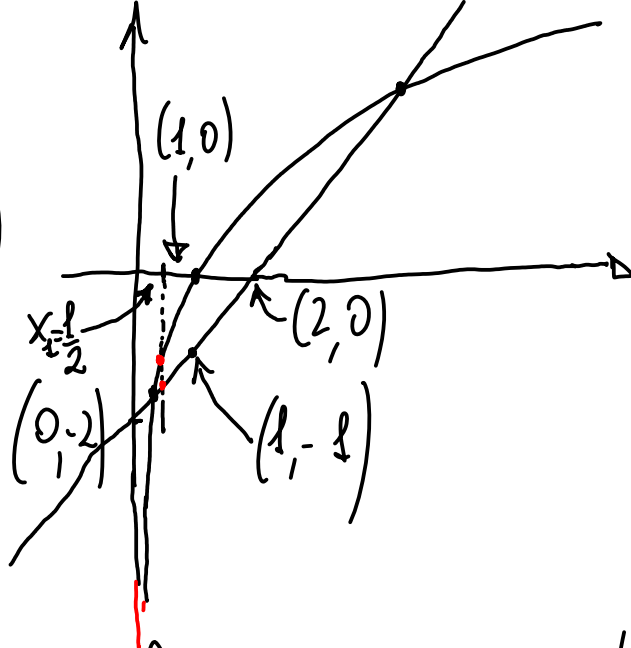


$$f(x) = x - 2 - \log x = 0$$

$$g(x) = x - 2, \quad h(x) = \log x, \quad g(x) = h(x)$$



Dalle osservazioni seguenti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad f(1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists 2 \text{ soluzioni } \bar{x}_1, \bar{x}_2 \text{ t.c. } f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2) = 0.$$

Si determinino $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ t.c. $\beta - \alpha \leq 1/10, \delta - \gamma \leq 1/10, \bar{x}_1 \in (\alpha, \beta), \bar{x}_2 \in (\gamma, \delta)$ - Cominceremo dalla determinazione di x_1 .

Poniamo $a_0 = 0, b_0 = 1$ (notiamo che $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$, con abuso di notazione perche $\lim_{x \rightarrow a_0} f(x) = +\infty$).

Primo passo: calcoliamo $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 1/2$ e $f(x_1) \approx -0.69 \Rightarrow \bar{x}_1 \in (a_1 = 0, b_1 = 1/2)$

Secondo " : " $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 1/4, f(x_2) \approx -0.36 \Rightarrow \bar{x}_1 \in (a_2 = a_1 = 0, b_2 = x_1 = 1/2)$

Terzo passo: Calcoliamo $x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1}{8}$, $f(x_3) \approx +0.2 \Rightarrow \bar{x}_1 \in \left(\frac{a_3 = x_3 = \frac{1}{8}, b_3 = \frac{b-1}{4} \right)$

Quarto " : " $x_4 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{3}{16}$, $f(x_4) \approx -0.14 \Rightarrow \bar{x}_1 \in \left(\frac{a_4 = a_3 = \frac{1}{8}, b_4 = x_4 = \frac{3}{16} \right)$

- STOP - dell'algoritmo di bisezione perché l'ampiezza dell'intervallo $\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16} \right)$ è $\frac{1}{16} < \frac{1}{10} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{3}{16}$

$\bar{x}_1 \in (\alpha, \beta)$ -

Esercizio: completare per $\bar{x}_2 \in (r, d)$ -

Supponiamo: si parta da $\bar{x}_2 \in (a_0, b_0)$ con
 $a_0 = 1, b_0 = 4$ -

(e pure $f(x)g(x)$ perché $f(x) > 0$)

Proposizione: Siano f e g t.c. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$
entrambe continue in $x_0 \in D$, allora
 $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ sono continue in x_0 e anche $f(x)/g(x)$ purché $g(x_0) \neq 0$

Funzioni composte

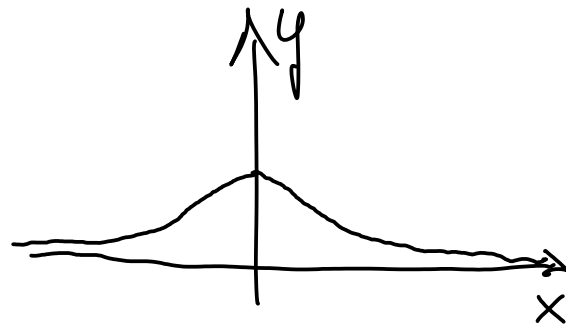
Def.: Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$ se l'immagine di f ,
cioè $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$, è compresa in D' (cioè $f(D) \subseteq D'$)
allora diciamo che $g \circ f$ (g composto f) è la composizione delle
2 funzioni, data da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Esempi: $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, dove $f(x) = x^2 + 1$ e $g(y) = \frac{1}{y}$

$(g \circ f)(x) = \sin(1/x)$, dove $f(x) = 1/x$ e $g(y) = \sin(y)$.

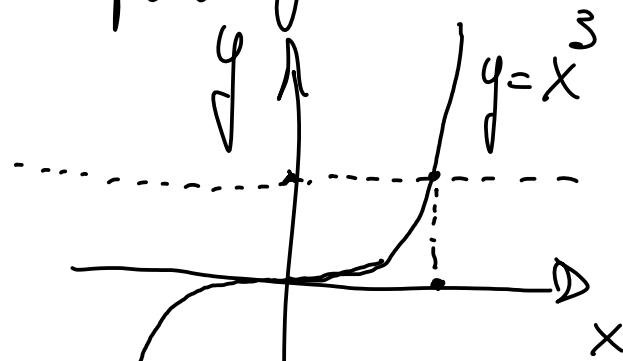
Proposizione: Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f(D) \subseteq D'$,
 f è continua in x_0 , g è continua in $y_0 = f(x_0)$, allora
 $(g \circ f)(x)$ è continuo in x_0 .

Esempio di applicazione $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
 è continua su tutto $\mathbb{R}$

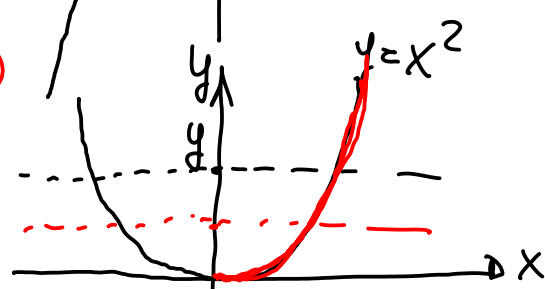


Definizione: Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione iniettiva cioè t.c.
 $\forall y \in f(D) \exists! x \in D$ t.c. $f(x) = y$; allora si dice che
 $f^{-1}: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione inversa della f , definita
 in modo t.c. $f^{-1}(y) = x$, dove $f(x) = y$.

Esempio: $f(x) = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$
 $f^{-1}(\cdot) = \sqrt[3]{\cdot}$



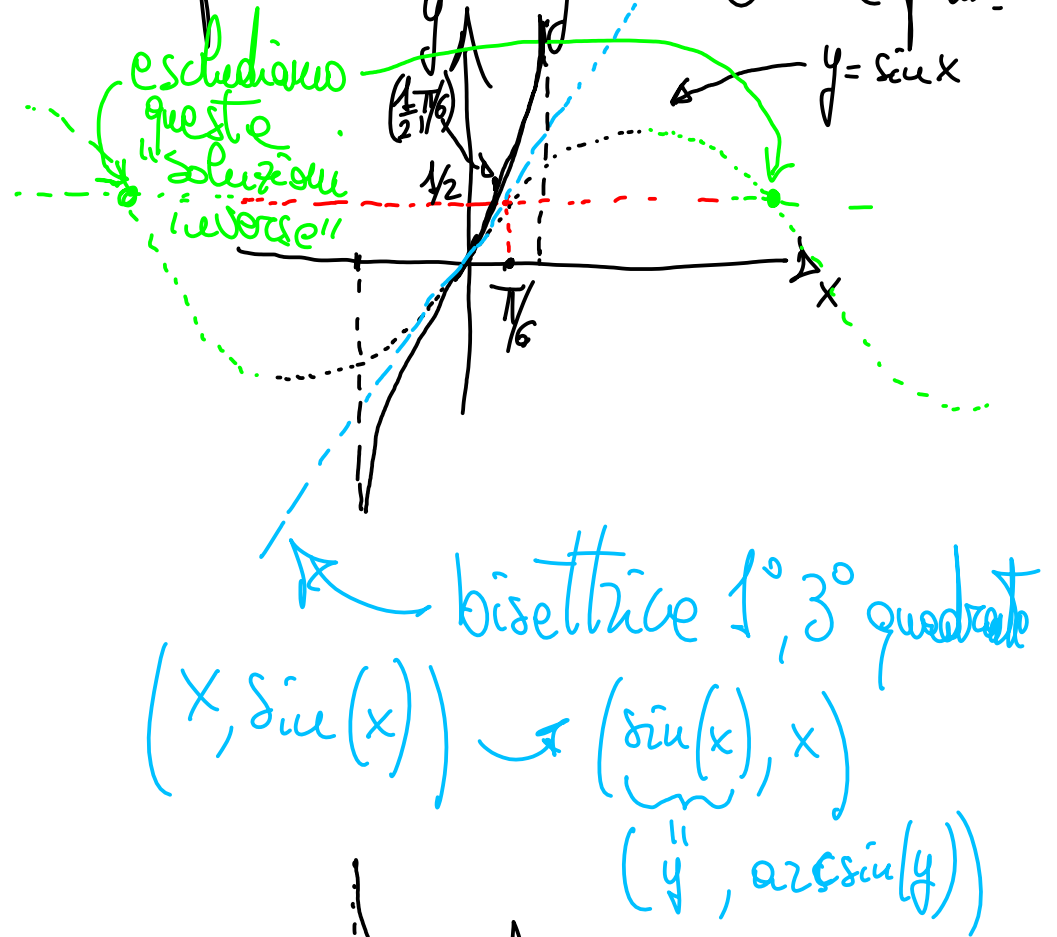
Esempio: $f(x) = x^2$ con $f: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$
 allora f è invertibile e $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$



Esempi: inverse delle funzioni trigonometriche fond.

x	$y = \sin(x)$
0	0
$\pm \pi/6$	$\pm 1/2$
$\pm \pi/4$	$\pm \sqrt{2}/2$
$\pm \pi/3$	$\pm \sqrt{3}/2$
$\pm \pi/2$	± 1

x	$y = \arcsin(x)$
0	0
$\pm 1/2$	$\pm \pi/6$
$\pm \sqrt{2}/2$	$\pm \pi/4$
$\pm \sqrt{3}/2$	$\pm \pi/3$
± 1	$\pm \pi/2$

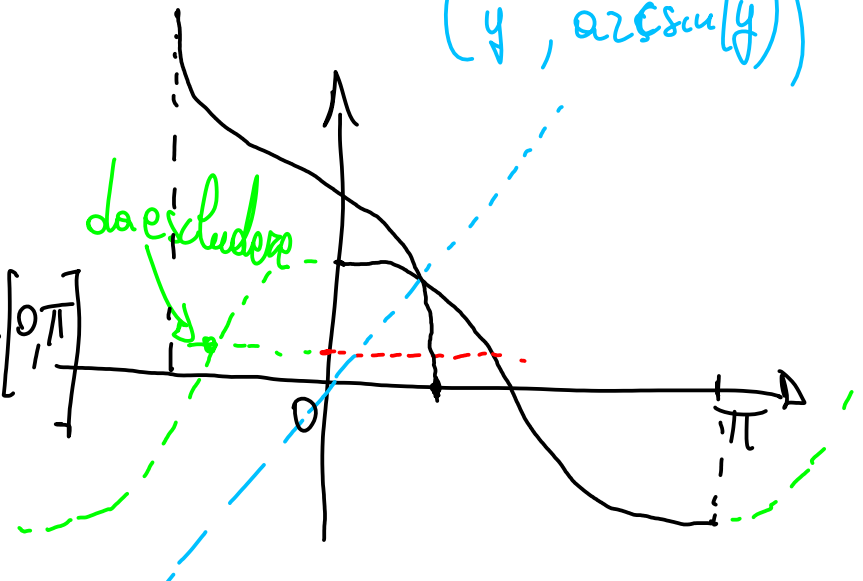


$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

x	$y = \cos(x)$
0	1
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$
$\pi/2$	0

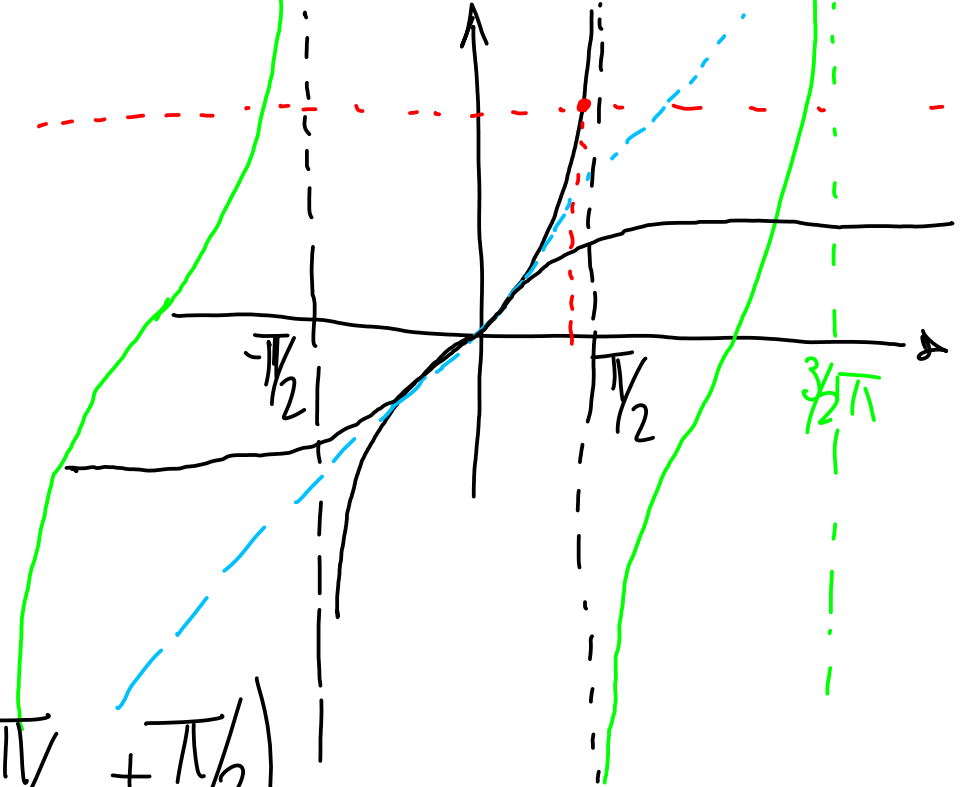
x	$y = \arccos(x)$
1	0
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/3$
0	$\pi/2$

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



x	$y = \tan(x)$	x	$\arctan(x)$
0	0	0	0
$\pm \pi/6$	$\pm 1/\sqrt{3}$	$\pm 1/\sqrt{3}$	$\pm \pi/6$
$\pm \pi/4$	± 1	± 1	$\pm \pi/4$
$\pm \pi/3$	$\pm \sqrt{3}$	$\pm \sqrt{3}$	$\pm \pi/3$
$\pm \pi/2^-$	$\pm \infty$	$\pm \infty$	$\pm \pi/2$

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$



Proposizione: Se una funzione f è strettamente
monotona $(f(x_1) < f(x_2) \forall x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D)$ crescente / decrescente
allora essa è invertibile

Proposizione: Se la funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente monotona
e continua su D allora anche f^{-1} è continua su tutto $f(D)$