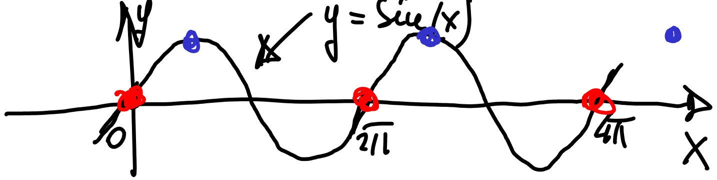
$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$$



Teorema: se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ $\exists$ allora è unico.

Def.: $\lim_{x\to c} f(x)=\ell$ se $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n\in D$ (dove $f: D\to\mathbb{R}$) e $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$, si ha che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$.

Selezioniamo una prima successione $\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, perché $\xi_n := \frac{1}{2n\pi}$ allora osserviamo che $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{\xi_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin(2n\pi) = 0$. (In figura sono i p.ti rossi).

Selezioniamo una seconda successione $\eta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, perché $\eta_n := \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$)

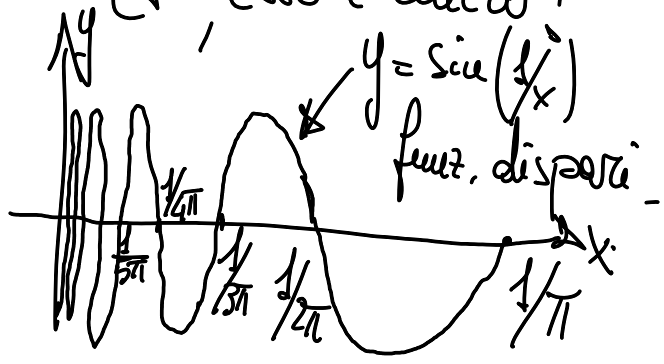
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{\eta_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\pi/2 + 2n\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\pi/2) = 1$$

(In figura sono i p.ti blu)

Dal caso con $x_n=\xi_n \Rightarrow \ell=0$, dal caso con $x_n=\eta_n\Rightarrow \ell=1$, siamo quindi giunti a un assurdo: se il limite $\exists$, esso è unico!

Concludiamo che il limite non esiste.

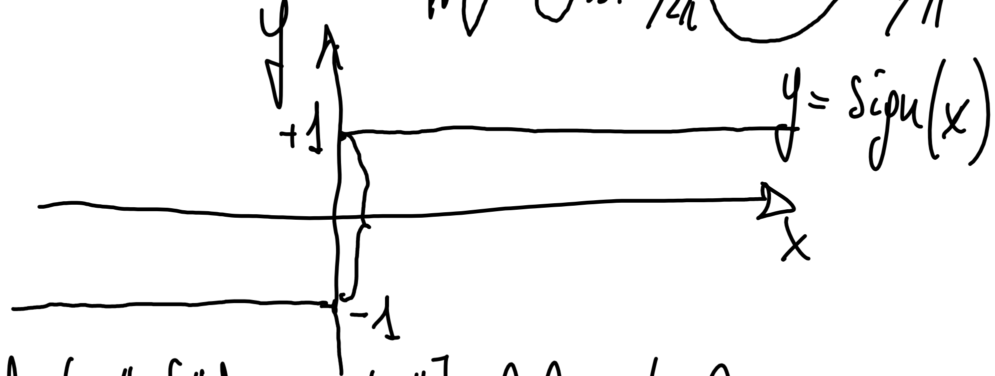
Grafico di $y = \sin(1/x)$ $\longrightarrow$



Esempi di discontinuità.

Discontinuità "con salto"

esempio, qui a dx. $\longrightarrow$



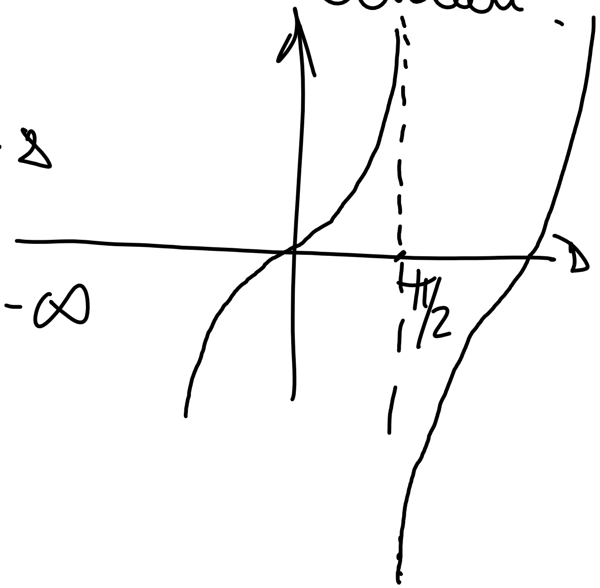
Def.: Si dice che $f(x)$ tende "da destra" ["da sinistra"] al limite ℓ per ~~x~~ che tende a c oppure per $x \to c^+$ $[x \to c^-]$ se $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ succ. t.c. $x_n \in D$ di f e $x_n \to c$ per $n \to +\infty$ con $x_n > c$ $[x_n < c]$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Esempio: $\lim_{x\to 0^+} \text{sign}(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} \text{sign}(x) = -1$.

Analogamente, $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0^+$.

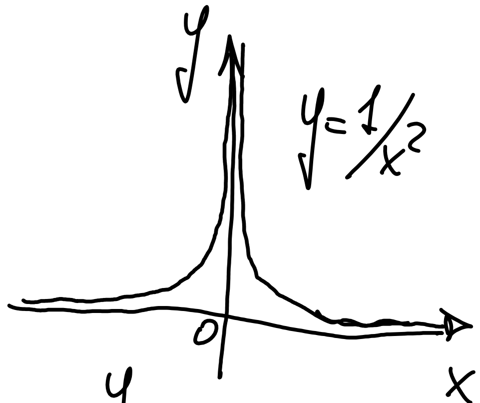
Esempi di discontinuità con asintoti verticali

$y = \tan(x)$



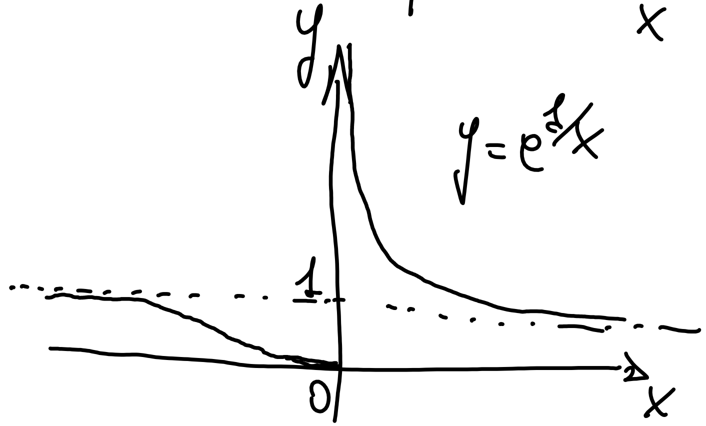
$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$

$y = 1/x^2$



$\lim_{x \to 0^\pm} 1/x^2 = +\infty$

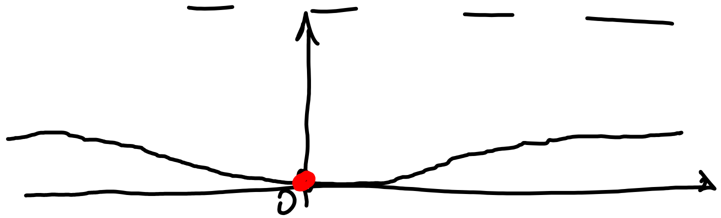
$y = e^{1/x}$



$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0^+$, $\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$

Esempi di discontinuità eliminabili

$y = e^{-1/x^2}$, $\lim_{x \to 0^\pm} e^{-1/x^2} = 0^+$



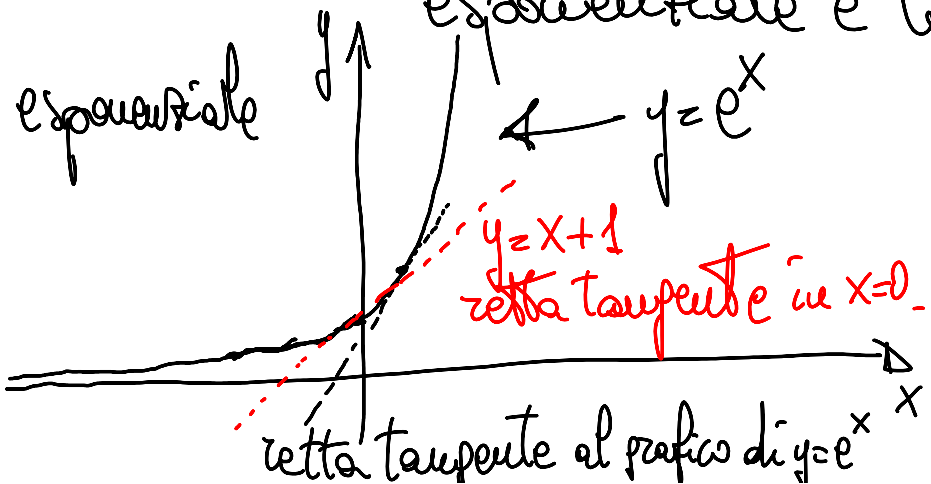
Def.: si dice che la funzione f ha un asintoto verticale in corrispondenza a c se $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

Def.: si dice che $f(x)$ ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, se
$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x)/x = m \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R} \end{cases}$$
(alternativamente $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx+q) = 0$).

Inoltre, si dice che $f(x)$ ammette asintoto orizzontale quando $m = 0$.

- Grafici delle funzioni esponenziale e logaritmo

esponenziale

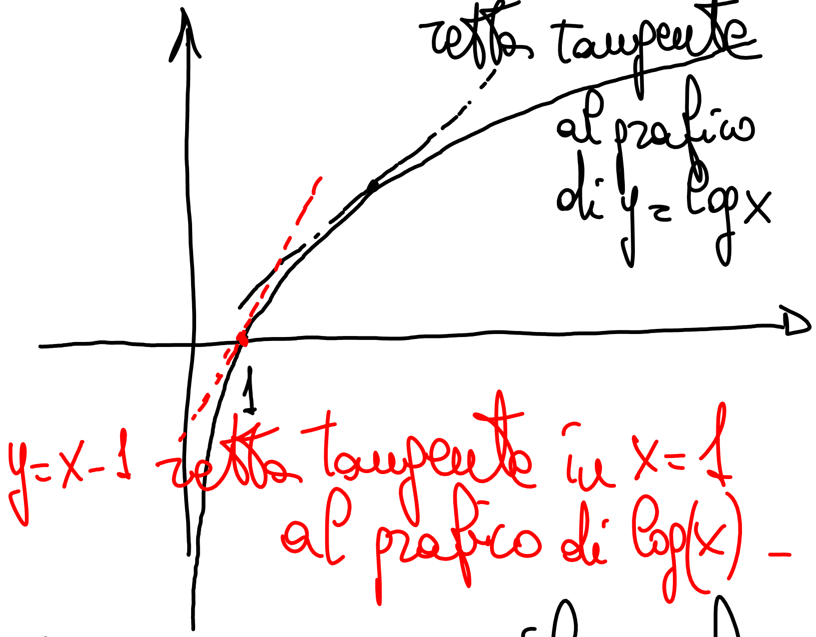


x	y
0	1
1	e
2	e^2
3	e^3

dove $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \simeq 2{,}71\ldots$

Siccome $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

x	y
-1	$1/e$
-2	$1/e^2$
-3	$1/e^3$



$y = \log x \iff x = e^y$

x	y
1	0
e	1
e^2	2
e^{-1}	-1

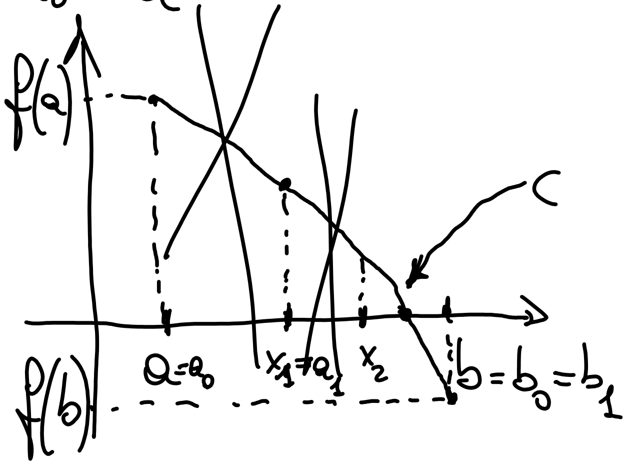
Osservazione: il grafico dell'esponenziale [logaritmo] sta sempre al di sopra [sotto] della sua retta tangente.

Teorema [degli zeri]: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.c.

(1) f è continua in $[a, b]$; (2) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

allora $\exists\, c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$.

Procedimento di ricerca della soluzione



Definiamo delle successioni di "valori estremi" $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e una succ. di "valori medi" $\{x_n\}_{n\geq 1}$.

Poniamo $a_0=a$, $b_0=b$ e $x_1=\frac{a_0+b_0}{2}$

Definiamo $x_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ e se $f(x_{n+1})=0 \Rightarrow c=x_{n+1}$ (abbiamo trovato la soluzione )

se invece $f(x_{n+1})\neq 0 \Rightarrow \underline{a_{n+1}=a_n,\ b_{n+1}=x_{n+1}}$, se $f(a_n)\cdot f(x_{n+1})<0$

altrimenti, se $f(a_n)\cdot f(x_{n+1})>0$, poniamo $a_{n+1}=x_{n+1}$, $b_{n+1}=b_n$.

Iteriamo il procedimento di bisezione.

Dim. (del teorema degli zeri): Osserviamo che $\{a_n\}$ è monotona crescente e $\{b_n\}$ è monotona decrescente $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n=\bar{a}$, $\lim_{n\to+\infty} b_n=\bar{b}$.

Inoltre, $\underline{\underline{\bar{a} = \bar{b}}}$. (Infatti, supponiamo per assurdo che $|\bar{a}-\bar{b}| = \varepsilon > 0$, allora $\exists N$ t.c. $|a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{4}$, $|b_n - \bar{b}| < \varepsilon/4$, $|a_n - b_n| = \frac{|a-b|}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$ $\forall n \geq N \Rightarrow \varepsilon = |\bar{a}-\bar{b}| = |(\bar{a}-a_n) + (a_n - b_n) + (b_n - \bar{b})| \leq |\bar{a}-a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - b| < \frac{3}{4}\varepsilon$, assurdo!)

Consideriamo $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) \leq 0$ per il th. di permanenza del segno.

Riconsideriamo $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) =$, per la continuità di f, $= f(\bar{a})\cdot f(\bar{b}) =$
$= (f(\bar{a}))^2 \geq 0 \Rightarrow f(\bar{a}) = 0$, poniamo $c = \bar{a}$. C.V.D.

Esercizio (preso dal tema d'esame del 5/2/2015)

$f'(x) = x - 2 - \log x$. Determinare (α, β), (γ, δ) t.c. le 2 soluzioni di $f'(x) = 0$ stanno in (α, β) e (γ, δ) con $\beta - \alpha < 1/10$, $\delta - \gamma < 1/10$