Funzioni reali di variabili reale

$f: D \to \mathbb{R}$, dove $D \subseteq \mathbb{R}$

Esempi: $f(x) = \underbrace{2x+4}_{\text{valore di uscita}}$, dove x è il valore di entrata

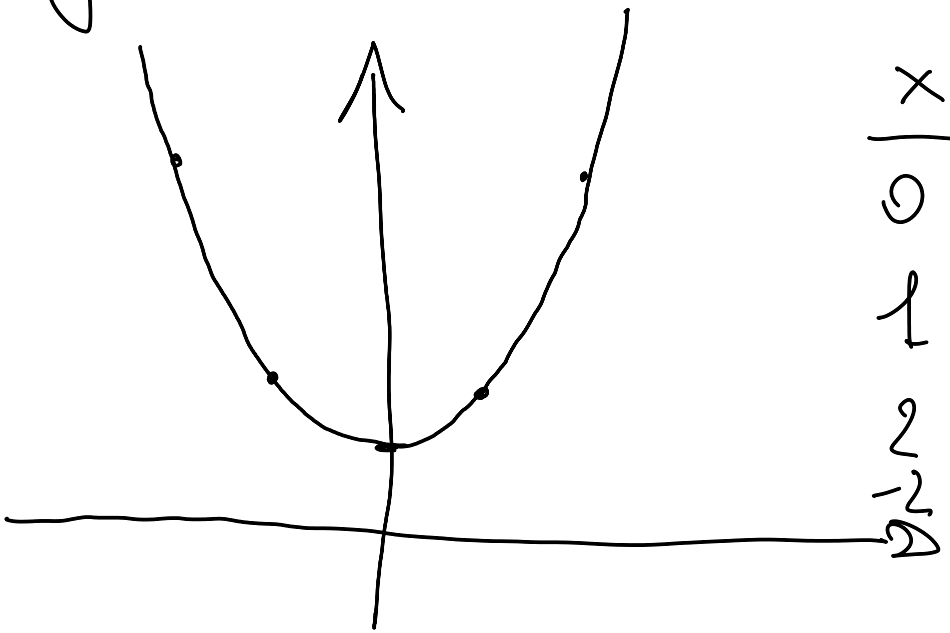
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x	$y = 2x+4$
0	4
1	6
-2	0
-1	2

Def: Si dice grafico di una funzione $f(x)$ l'insieme $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ dove $f: D \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



x	y
0	1
1	2
2	5
-2	5

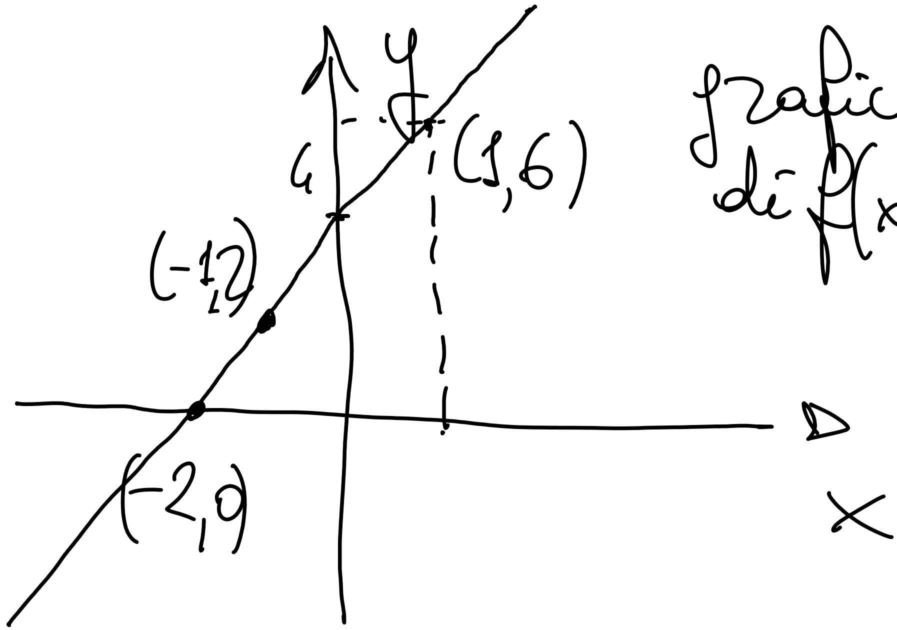
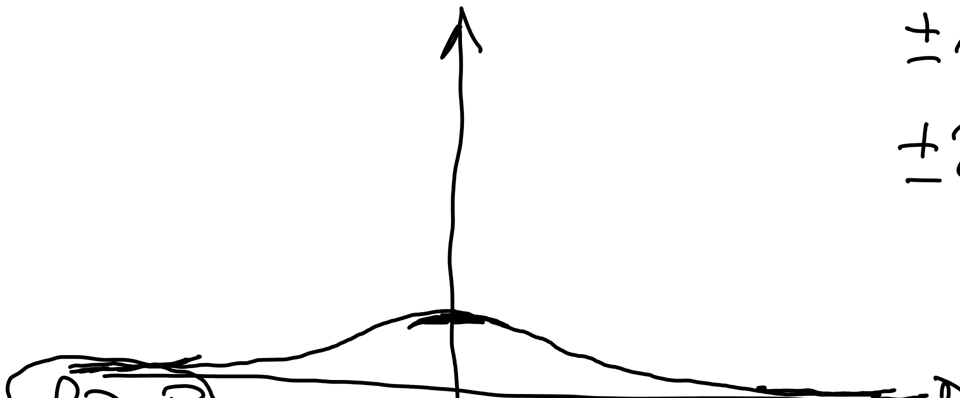


grafico di $f(x)$

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+1}$$

x	y
0	1
± 1	$1/2$
± 2	$1/5$



Def: diciamo che una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ è limitata superiormente [inferiormente] se $\exists\, M\ [m]$ t.c. $\forall x \in D$, $f(x) \leq M$ $[f(x) \geq m]$.

Def.: diciamo che una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ è limitata se è limitata sia superiormente che inferiormente.

Def.: diciamo che una $f: D \to \mathbb{R}$ è illimitata se non è limitata.

Negli esempi precedenti: f è illimitata, g è illimitata, ma limitata inf., h è limitata.

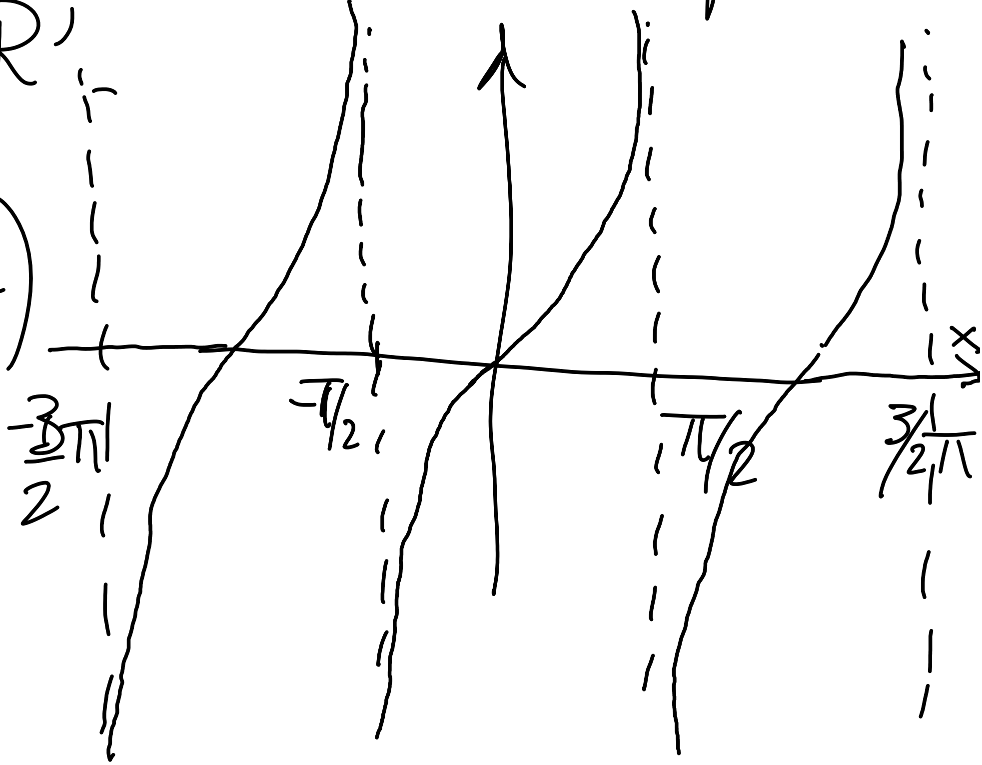
Def.: diciamo che una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ è pari [dispari] se $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$ [$f(-x) = -f(x)$]. Se una funz. è pari o dispari si dice essere simmetrica.

Def.: diciamo che una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ è periodica (di periodo $T > 0$) se $\forall x \in D$ si ha che $f(x+T) = f(x)$.

Si esclude, ovviamente, il caso di funzioni costanti, cioè $f(x) = c \in \mathbb{R}$.

Esempio: $f(x) = \tan(x)$

$\tan(-x) = -\tan(x)$. Periodica di periodo π.



Def.: diciamo che una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ è monotona crescente [decrescente] se $\forall x_1, x_2 \in D$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) \leq f(x_2)$ $[f(x_1) \geq f(x_2)]$

Si dice che è strettamente crescente [decrescente] se le disuguaglianze valgono senza l' $=$

Limite per le funzioni

Def.: Sia $f: D \to \mathbb{R}$, diciamo che f tende a

ℓ per x che tende a c, se $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in D$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$ si ha che

per ogni successione!

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$$

e si scrive $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$.

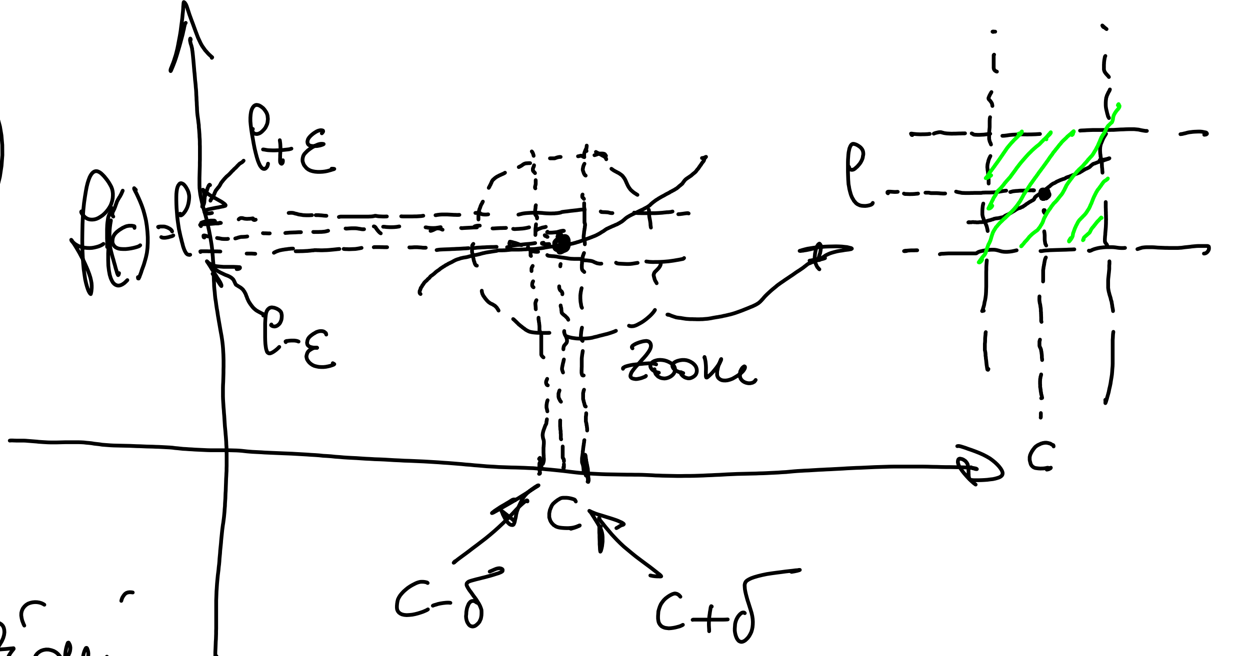
Questa definizione copre i casi in cui $c \in D$ o $c \notin D$, $c \in \mathbb{R}$ oppure $c = \pm\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$ oppure $\ell = \pm\infty$.

Def (alternativa di limite, quando sia c che $\ell \in \mathbb{R}$):
Diciamo che il limite di $f: D \to \mathbb{R}$ per x che tende a c è ℓ, se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in D \setminus \{c\}$ si ha che

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

e si scrive $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$.

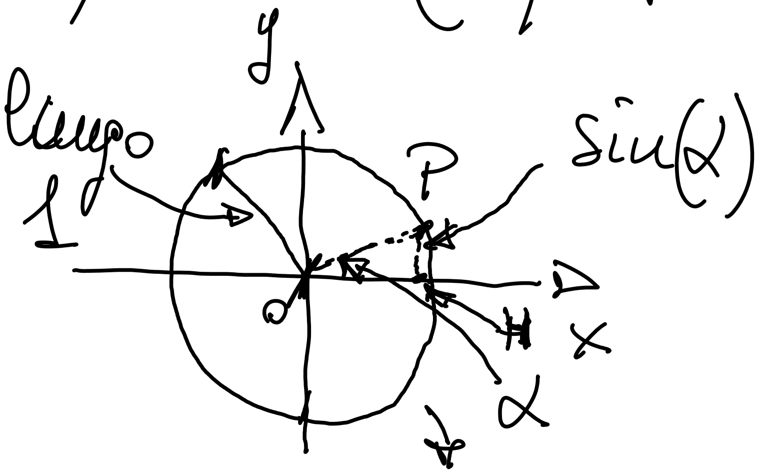
Teorema: Se $\exists \lim_{x \to c} f(x)$ esso è unico.



(Teorema di unicità del limite per le funzioni, che segue dal th. corrispondente per le successioni).

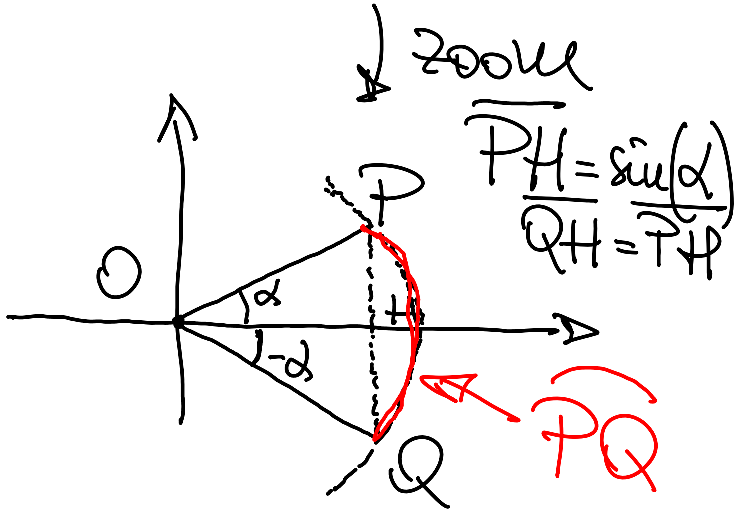
Proposizione: $\lim_{x \to c} \sin(x) = \sin(c) \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

Lemma: $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$.



Dim. del lemma: Osserviamo (per il teorema della corda) che

$$2|\sin(\alpha)| = \overline{PQ} \leq \overset{\frown}{PQ} = \underset{\text{raggio}}{1} \cdot |2\alpha|$$



$$\Rightarrow 2|\sin(\alpha)| \leq 2|\alpha| \Rightarrow \boxed{|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|}$$

Prendiamo una generica successione x_n t.c. $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, allora

$\lim_{n\to+\infty} \sin(x_n) = 0$ per il teorema del confronto applicato alla disuguaglianza $-|x_n| \leq \sin(x_n) \leq |x_n|$

(è conseguenza di $|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$)

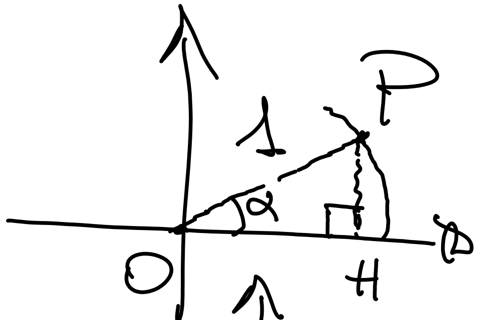
che è del tipo $a_n \leq b_n \leq c_n$

con $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\lim_{n \to +\infty} |x_n| = \lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} |x_n| = 0$

C.V.D. (fine della dim. del lemma)

Lemma: $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$

Dim. (di questo 2° lemma): Osserviamo che $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$



$\cos(\alpha) = \overline{OH}$

$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, calcoliamo

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1-\sin^2 x_n} = 1$$

C.V.D. (per il 2° lemma)

Dim. (della proposizione): consideriamo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$ e calcoliamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\overbrace{(x_n-c)}^{a}+\overset{b}{c}) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\sin(x_n-c)\cdot\cos(c)+\cos(x_n-c)\cdot\sin(c)\right] = 0\cdot\cancel{\cos(c)}+1\cdot\sin(c)$$

$$= \sin(c)$$

dove abbiamo usato che $\sin(a+b) = \sin(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\sin(b)$

e le uguaglianze $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$.

C.V.D.

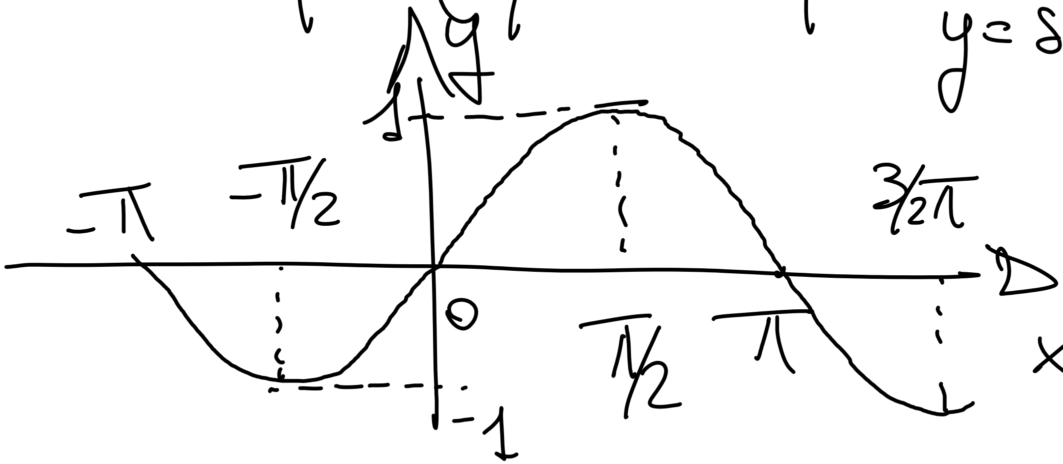
Proposizione: $\lim_{x\to c} \cos(x) = \cos(c) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Verifica per esercizio: analoga al caso del seno, ma bisogna usare $\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b)$

Definizione: diciamo che una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ è <u>continua</u> se $\forall c \in D$ si ha che $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

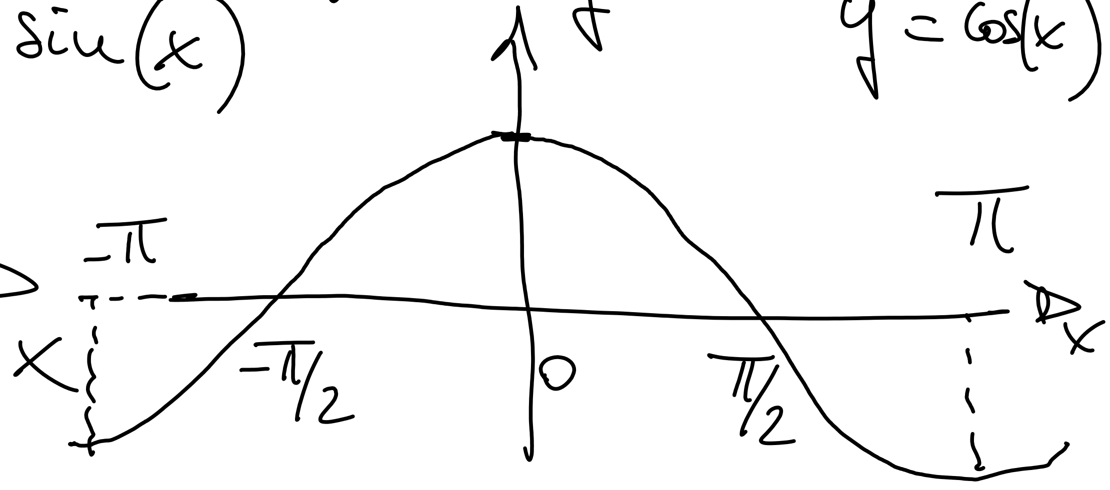
Esempi (quelli precedenti):

$y = \sin(x)$



è dispari

$y = \cos(x)$



è pari

Esempio di funzione discontinua in un punto: $\sin(1/x)$ che non ammette limite per $x \to 0$.