

Esempio 1.8: $? = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

Suggerimento: moltiplicare "sopra e sotto" $\times \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1 - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1 - n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}, \text{ osservando che } \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0$$

- Concetti di infinito, infinitesimo
e confronti tra infiniti e infinitesimi.

Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$

Def.: Si dice che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un infinito -

$$\text{Sia } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & (\text{caso 1}) \\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & (\text{" 2}) \\ +\infty & (\text{" 3}) \\ \neq & (\text{" 4}) \end{cases}$$

Def.: Nel caso 1 diremo che a_n è un infinito di ordine inferiore a b_n
 " " 2 " " a_n e b_n sono 2 infiniti dello stesso ordine
 " " 3 " " a_n è un infinito di ordine superiore a b_n

" " " " " " a_n e b_n non sono comparabili.

Esempi: $a_n = \sqrt{n}$ e $b_n = n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1/2}}{n} = 0$

Scambiando a_n e b_n creiamo un esempio del terzo caso.

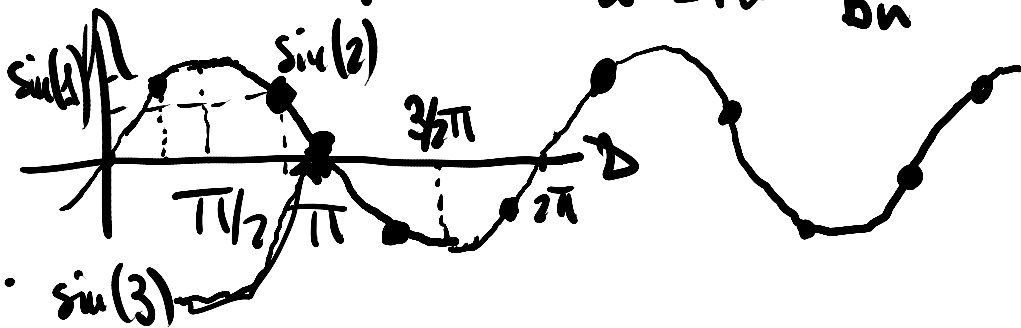
$$a_n = \sqrt{n+1}, b_n = \sqrt{n-1} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n-1}} = 1,$$

dove abbiamo usato l'identità $\frac{n+1}{n-1} = \frac{n-1+2}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{2}{n-1}$

Sia $a_n = 2n + \sin(n)$ $b_n = n$. Osservo che $c_n = n$ è t.c.

$a_n \geq c_n$. Siccome $c_n \rightarrow +\infty$ allora per il th. del confronto si ha che a_n è un infinito. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \sin(n)$

Si ricorda che il grafico del seno è qui a dx.



Esempio del caso 4.

Def.: si dice che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un infinitesimo quando $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
due infinitesimi t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & (\text{caso 1}) \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & (\text{caso 2}) \\ \pm\infty & (\text{caso 3}) \\ \nexists & (\text{caso 4}) \end{cases}$

Def.: nel caso 1 diremo che a_n è un infinitesimo di ordine superiore a b_n
" " 2 " " " è dello stesso ordine di b_n
" " 3 " " " è un infinitesimo di ordine inf. a b_n
" " 4 " " " e b_n non sono comparabili.

Def.: quando a_n e b_n sono 2 infiniti [infinitesimi] dello stesso ordine, allora si scrive che $a_n = O(b_n)$

Def.: se a_n e b_n sono infiniti [infinitesimi] t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$,
allora si scrive che $a_n = o(b_n)$.

Def.: si dice che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è asintotica a $\{b_n\}$ quando
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$; si scrive che $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$.

Strategia di calcolo dei limiti in presenza
di prodotti e divisioni. Siano, ades., $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$,
 $\{a'_n\}, \{b'_n\}, \{c'_n\}$ t.c. $a_n \sim a'_n, b_n \sim b'_n, c_n \sim c'_n$ per $n \rightarrow +\infty$
e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a'_n \cdot b'_n}{c'_n} = \ell$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n \cdot b_n}{c_n} = \ell$.

Infatti, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n \cdot b_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n}{a'_n} \right) \left(\frac{b_n}{b'_n} \right) \left(\frac{c'_n}{c_n} \right) \cdot \frac{a'_n \cdot b'_n}{c'_n}$
 $= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ell = \ell$

Gerarchia degli infiniti

$$\log n = o(n^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$$

$$n^\alpha = o(q^n) \quad \forall \alpha > 0 \text{ e } q > 1$$

$$q^n = o(n!)$$

$$n! = o(n^n)$$

Sia $\alpha = 2 = q$

$$n^\alpha = n^2, \quad q^n = 2^n$$

Verifichiamo la seconda:

Consideriamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot \frac{b_n}{a_n}$ con $b_n = q^n$ e $a_n = n^\alpha$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^q}{q^{n+1}} \cdot \frac{q^n}{n^q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^q \cdot \frac{1}{q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q \cdot \frac{1}{q} \\ = \frac{1}{q} < 1 \text{ perché } q > 1.$$

Osserviamo che $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{1}{q-\varepsilon}$ con $\varepsilon < q-1$

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \left(\frac{q}{q-\varepsilon} \right)^{n-N} \cdot \frac{a_N}{b_N} \cdot \frac{1}{q^n} \quad \text{dove } N \text{ è t.c. } \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q < \frac{q}{q-\varepsilon} \quad \forall n$$

Esempio 1.12

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log(n)}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1$$

dove abbiamo usato che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = 0$.

Esercizio 6 pag. 137

$$\frac{n^3 + 2n^2 + \sin n}{n + \log n} \sim ?$$

$$\frac{n^3 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{\sin n}{n^3}\right)}{n \left(1 + \frac{\log n}{n}\right)} \sim \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n}} = n^2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 2n^2 + \sin n}{n + \log n} \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n^3} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{\sin n}{n^3}\right)}{\cancel{n} \left(1 + \frac{\log n}{n}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

Verificare che

$$\frac{n^2 \log n + n}{\log 3n} \sim n^2 \text{ e che } \frac{n! - (n-1)!}{n + (n-2)!} \sim n^2$$

Esercizio 11 a pag. 138

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n+1} - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0,$$

dove abbiamo usato che $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$, cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$

Verificare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n} - n = 1/2$

e che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^4+1} - n^2) = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\log(n+1) - \log n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{n+1}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{n(1+1/n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log(1+1/n) = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n}$$

dove ho usato che $b^{a \cdot c} = (b^a)^c$.

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1/n} = e^0 = 1.$$