Teorema: Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a\in\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b\in\mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = a\pm b, \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n\cdot b_n = a\cdot b},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ se } b\neq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = a^b \text{ se } a>0$$

Dim. (ci limitiamo al prodotto). Ci occorre dimostrare separatamente il

Lemma: siano $m_1>|a|$, $m_2>|b|$, allora $\exists\,\bar{N}$ t.c. $\forall n>\bar{N}$, $|a_n|\leq m_1$, $|b_n|\leq m_2$.

Dim (del Lemma): poniamo $\varepsilon=\min\{m_1-|a|,\ m_2-|b|\}$ (osserviamo che $\varepsilon>0$). Per def. di limite applicato a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ allora $\exists\, N_a$ t.c. $\forall n\geq N_a$, $|a_n-a|<\varepsilon$. Applico la disuguaglianza triangolare a

$$|a_n| = |a-(a-a_n)| = |a+(a_n-a)| \leq |a|+|a_n-a| \leq |a|+\varepsilon \leq \cancel{|a|}+m_1-\cancel{|a|} = m_1 \quad \forall n\leq N_a.$$

Analogamente, per def. di limite applicato a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\exists N_b$ t.c. $\forall n \geq N_b$, $|b_n - b| < \varepsilon$. Usando di nuovo la disug. triang. abbiamo che
$|b_n| = |b + (b_n - b)| \leq |b| + |b_n - b| \leq |b| + \varepsilon \leq \cancel{|b|} + m_2 - \cancel{|b|} \leq m_2$.
Poniamo $\bar{N} = \max\{N_a, N_b\}$ e l'affermazione del lemma è verificata.

C.V.D. (per il lemma).

Passiamo a provare che $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.
$\forall \varepsilon \; \exists N$ t.c. $\forall n \geq N$ allora valgono $|a_n| < m_1$, $|b_n| < m_2$
e anche $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{m_1 + m_2}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{m_1 + m_2}$. Consideriamo
$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |(a_n b_n - a \cdot b_n) + (a \cdot b_n - a \cdot b)| \leq |a_n b_n - a \cdot b_n| + |a b_n - a \cdot b|$
$\leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{m_1 + m_2} \cdot m_2 + m_1 \cdot \frac{\varepsilon}{m_1 + m_2} = \varepsilon \cdot \cancel{\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}}$ $\forall n \geq N$.

C.V.D.

Teorema: Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ e $a_n \leq b_n$ allora $a \leq b$. (in parole, i limiti preservano l'ordinamento).

Teorema (della permanenza del segno): Se $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ e $b_n \geq 0$ definitivamente allora $b \geq 0$.

Non è vero che se $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ e $b_n > 0 \Rightarrow b > 0$

Esempio: $b_n = 1/n$

Teorema (del confronto): Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$, allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

Teorema: Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = \pm\infty \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ -\infty & \text{se } a<0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 .$$

Teorema: Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty = \lim_{n\to+\infty} b_n$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$

Teorema: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ con a_n e b_n definitivamente positivi e $a>0$, allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Forme di indecisione

$$\boxed{+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}}$$

Oss. se abbiamo $\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{b_n \log a_n}$

$\Rightarrow 1^\infty$ è ricondotto a $\infty \cdot 0$

$\Rightarrow 0^0$ " " a $0 \cdot (-\infty)$

$\Rightarrow \infty^0$ " " " $0 \cdot \infty$

Sono forme di indecisione nel senso che, a seconda dei casi, possiamo avere un qualsiasi limite.

Esempi: $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n}_{a_n} - \underbrace{n^2}_{b_n} = -\infty$, $\lim_{n\to+\infty} n^2 - n = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\overset{a_n}{n^2}}{\underset{b_n}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1} = +\infty \,, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = 0 \,.$$

Def.: Diciamo numero di Nepero

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Cenni: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è monotona crescente.

$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è monotona decrescente $\frac{b_n}{a_n} = 1+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\Rightarrow a_n \le e \le b_n$.

La proprietà fondamentale di e è la seguente: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

Esempio 1.7: ? $= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/2}-3n+7}{n^3+\sqrt{n}-3n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\cancel{n^{5/2}}\,1}{\underset{\sqrt{n}}{\cancel{n^3}}} \cdot \frac{1-3/n^{3/2}+7/n^{5/2}}{1+\frac{1}{n^{5/2}}-\frac{3}{n^2}} \right) = 0$

Esempio 1.8: Si calcoli

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \right)$$

Suggerimento: moltiplico "sopra & sotto" per $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$.