

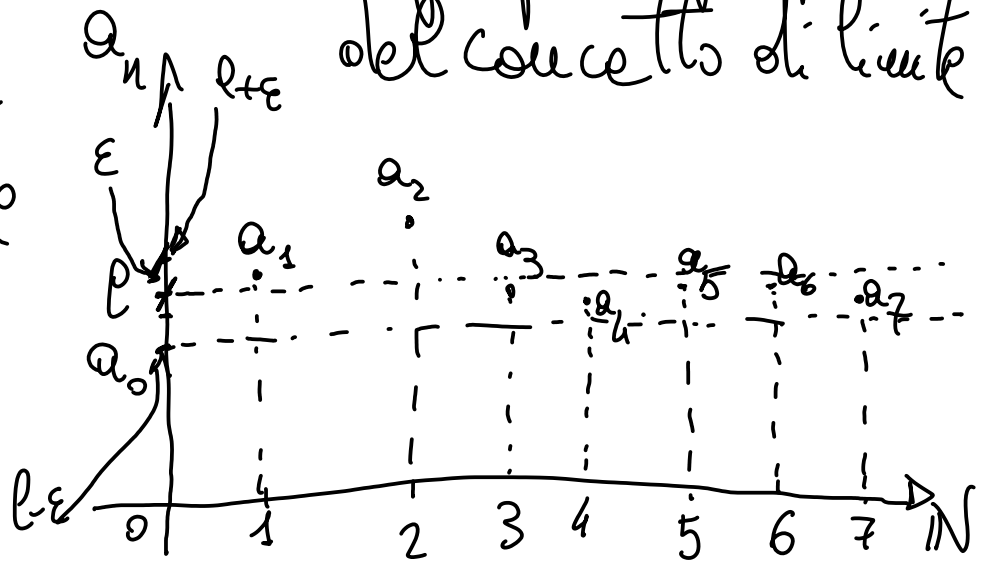
Successioni: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oppure $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ es.: $a_n = 2^n$, $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n-3} = \frac{\sqrt{j+4}}{j+4} = b_j$

Def.: diciamo che $a_n \rightarrow l$ (" a_n tende a l ") per $n \rightarrow +\infty$ (e scriviamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$) se $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ t.c. $\forall n \geq N, a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ (cioè $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$)

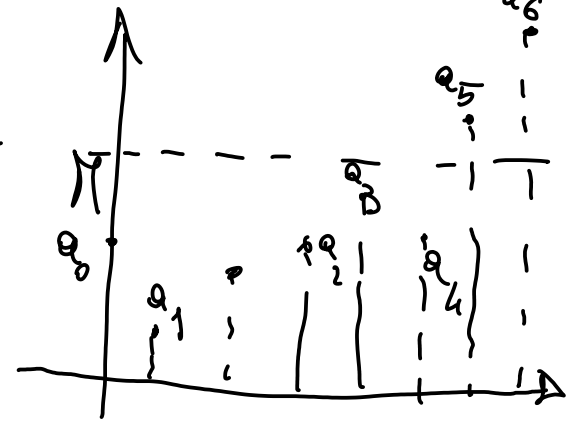
Si dice che una proprietà è soddisfatta definitivamente da una successione se essa vale $\forall n \geq N$. La def. di limite può essere riformulata come segue:

Significato "grafico" del concetto di limite



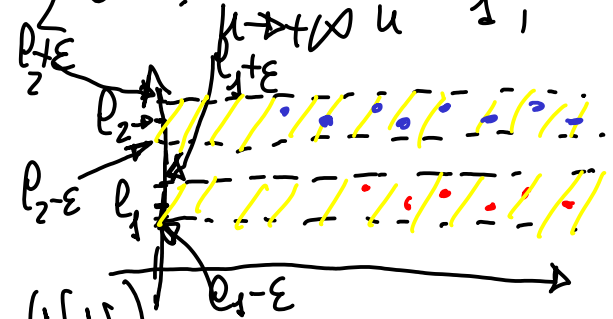
Def. (alternativa): $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ allora
 sono definitivamente soddisfatte le diseg. $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$.

Def.: Si dice che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty [-\infty]$ se $\forall M > 0 \exists N$
 t.c. $\forall n > N, a_n > M [a_n < -M]$.



Teorema: se il limite di a_n per $n \rightarrow +\infty$
 esiste, allora esso è unico.

Dim.: Supponiamo (per assurdo) che $\exists l_1 \neq l_2$ t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_1$,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_2$. Sia $\Delta = |l_1 - l_2|$, poniamo



$\varepsilon = \Delta/4$ allora $\exists N_1$ t.c. $\forall n > N_1, |a_n - l_1| < \varepsilon$ e

$\exists N_2$ t.c. $\forall n > N_2, |a_n - l_2| < \varepsilon \Rightarrow \forall n > \max(N_1, N_2)$

$\Delta = |l_1 - l_2| \leq |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2\Delta/4 = \Delta/2$. Siamo a un assurdo.
 C.V.D.

Esempio: $a_n = \frac{n-1}{n+1}$. ? = $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-1/n)}{n(1+1/n)} = 1$

Verifichiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$

Dobbiamo controllare che $\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ t. c. } \forall n \geq N$

$$\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Studiamo $1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1} < 1 + \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < 1 - \frac{2}{n+1} < 1 + \varepsilon$

$$-\varepsilon < -\frac{2}{n+1} < \varepsilon \iff -\varepsilon < -\frac{2}{n+1} \iff \frac{2}{n+1} < \varepsilon$$

è evidente!

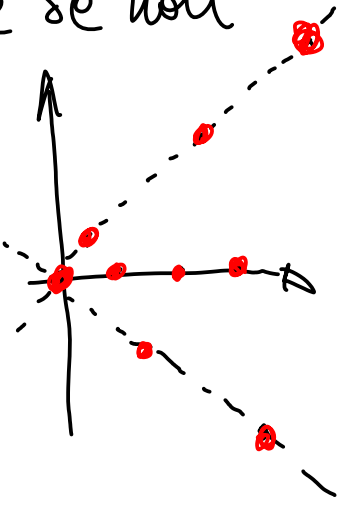
$$\iff \frac{2}{\varepsilon} < n+1 \iff n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

Basta scegliere $N > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \iff \forall n \geq N > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \rightarrow \text{è verificato}$

Def.: diciamo che una succ. è convergente [divergente] se ammette un limite $l \in \mathbb{R}$ [se il suo limite è $\pm\infty$].

Def.: diciamo che una successione è irregolare se non converge né diverge.

Esempi: $b_n = e^n$ è divergente $c_n = n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$ è irregolare



Def.: Si dice a_n è monotona crescente [decrescente] se $\forall n$ si ha che $a_n \leq a_{n+1}$ [$a_n \geq a_{n+1}$],
monotona strettamente crescente [decrescente] se senza l'uguale.

Proposizione: Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente allora
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} [= \inf \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$ [decrescente]

Dim.: Per semplicità facciamo solo il caso di $\{a_n\}$ crescente
e $\sup\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = l \in \mathbb{R}$.

Prima osservazione

$$a_n \leq l \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Seconda osservazione:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.c. } l - \varepsilon < a_n \leq l$$

[Verifica per assurdo della 2^a osservazione: Se non è vera
 $\Rightarrow a_n \leq l - \varepsilon \quad \forall n \Rightarrow l - \varepsilon$ è un maggiorante di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, assurdo

perché $\sup\{a_n\} = l > l - \varepsilon$

fine (della dim.): $\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.c. } \forall n \geq N, l - \varepsilon < a_n \leq l$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l = \sup\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ C.V.D.}$$