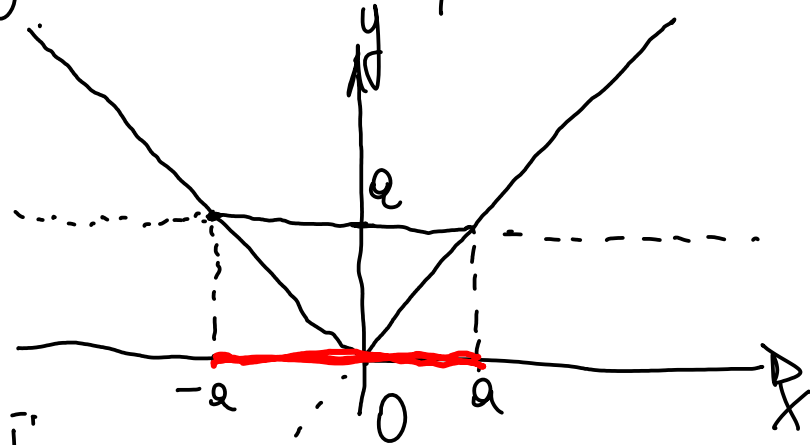


Proposizione: $\mathbb{R}$, dotato di $+$, $\cdot$, $\leq$ forma un campo ordinato, cioè soddisfa le proprietà (PS1)-(PPP).

Def: Diciamo valore assoluto di un qualsiasi $a \in \mathbb{R}$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Dss.: $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$



$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Disuguaglianza triangolare:

$$\left. \begin{aligned} |x| \leq |x| &\iff -|x| \leq x \leq |x| \\ |y| \leq |y| &\iff -|y| \leq y \leq |y| \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\leq (|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \\ &\text{Sommo} \\ &\text{a membro} \end{aligned}$$

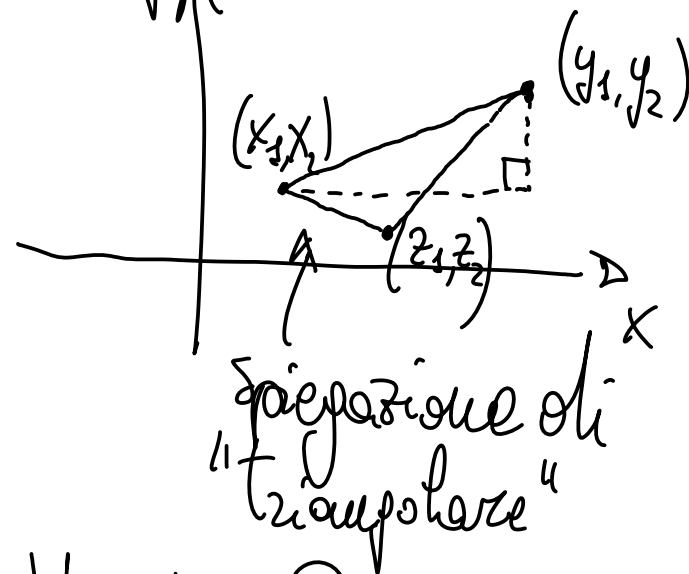
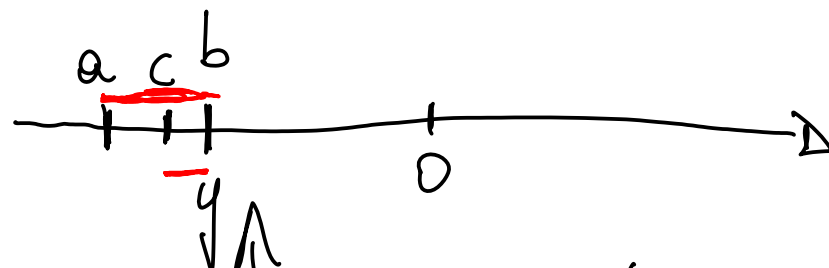
$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

disuguaglianza triangolare

Adattiamo la disuguaglianza triang. al caso $x = a - b$, $y = b - c$
 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. $|a - b + b - c| \leq |a - b| + |b - c|$

Proposizione: $(\mathbb{R}, d(\cdot, \cdot))$, dove
 $d(x, y) = |x - y|$, è uno spazio metrico.

Prop.: $(\mathbb{R}^2, d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2})$
 è uno spazio metrico



Poniamo $x = a - b$, $y = b$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Dalla disuguaglianza triangolare segue che $|a - b + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$

Poniamo $x = b - a$, $y = a \Rightarrow |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a - b|$

Dall'ultima diseq. $\Rightarrow -(|a| - |b|) \leq |a - b| \Rightarrow |a - b| \leq |a| - |b|$

Conseguenza
della diseq.
triangolare

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- Intervalli:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{intervallo chiuso}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{intervallo aperto}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

Verso i concetti di $\sup$ e $\inf$.

Def.: diciamo che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente [inferiormente] se $\exists M \in \mathbb{R}$ [$m \in \mathbb{R}$] t.c.

$\forall x \in A$ allora $x \leq M$ [$x \geq m$].

Def: diciamo che un valore $M \in \mathbb{R}$ [$\mu \in \mathbb{R}$] è il massimo [minimo] di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se $M \in A$ [$\mu \in A$] e $\forall x \in A, x \leq M$ [$x \geq \mu$].
Si scrive $\max A = M$: [$\min A = \mu$].

Esempi: $B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$, $\max B = 1$, $\nexists \min B$
 $C = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$, $\min C = -1$, $\nexists \max C$.

Def: Diciamo che $K \in \mathbb{R}$ [$k \in \mathbb{R}$] è un maggiorante [minorante]

per $A \subseteq \mathbb{R}$ se $\forall x \in A$ vale che $x \leq K$ [$x \geq k$].

Def.: Un insieme che ammette almeno un maggiorante [minorante] si dice limitato superiormente [inferiormente], altrimenti si dice illimitato superiormente [inferiormente].

Def.: L'estremo superiore [inferiore] di $A \subseteq \mathbb{R}$ è il minimo dei maggioranti [massimo dei minoranti] di A .
Si indica con $\sup A$ [$\inf A$].

Se A è illimitato superiormente [inferiormente] si pone
 $\sup A = +\infty$ [$\inf A = -\infty$].

Azienda [di Dedekind]: ogni insieme A limitato superiormente [inferiormente] ammette $\sup A \in \mathbb{R}$ [$\inf A \in \mathbb{R}$].

Esempi: $\sup B = 1$, $\inf B = 0$; $\inf C = -1$, $\sup C = 0$.

↓ $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo.

Proprietà delle potenze

Teorema: $\forall x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \exists! y \in \mathbb{R} \cup \{0\}$ t.c. $y^n = x \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
↳ "esiste ed è unico"

Si scrive $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

Proposizione: $x^{m/n} = (x^{1/n})^m \quad \forall m/n \in \mathbb{Q}^+, x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$
→ è ben definito x^a con $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

a^x con $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ si dice un esponenziale.

Proposizione: $\forall a > 0$, con $a \neq 1$, e $\forall x \in \mathbb{R}_+ \exists y$ t.c. $a^y = x$
Si scrive $y = \log_a x$.

Studiarsi le proprietà elementari di potenze e
logaritmi (a pag. 17 del libro)

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$