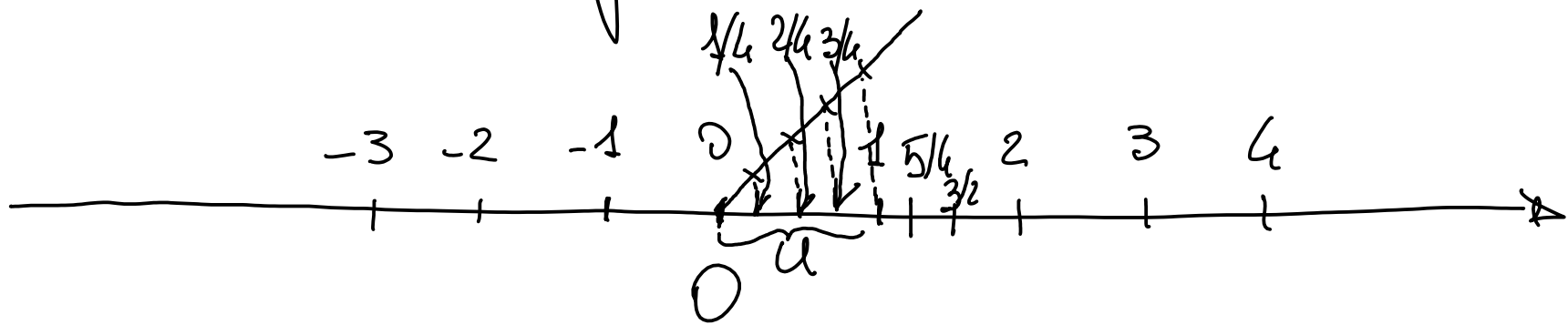


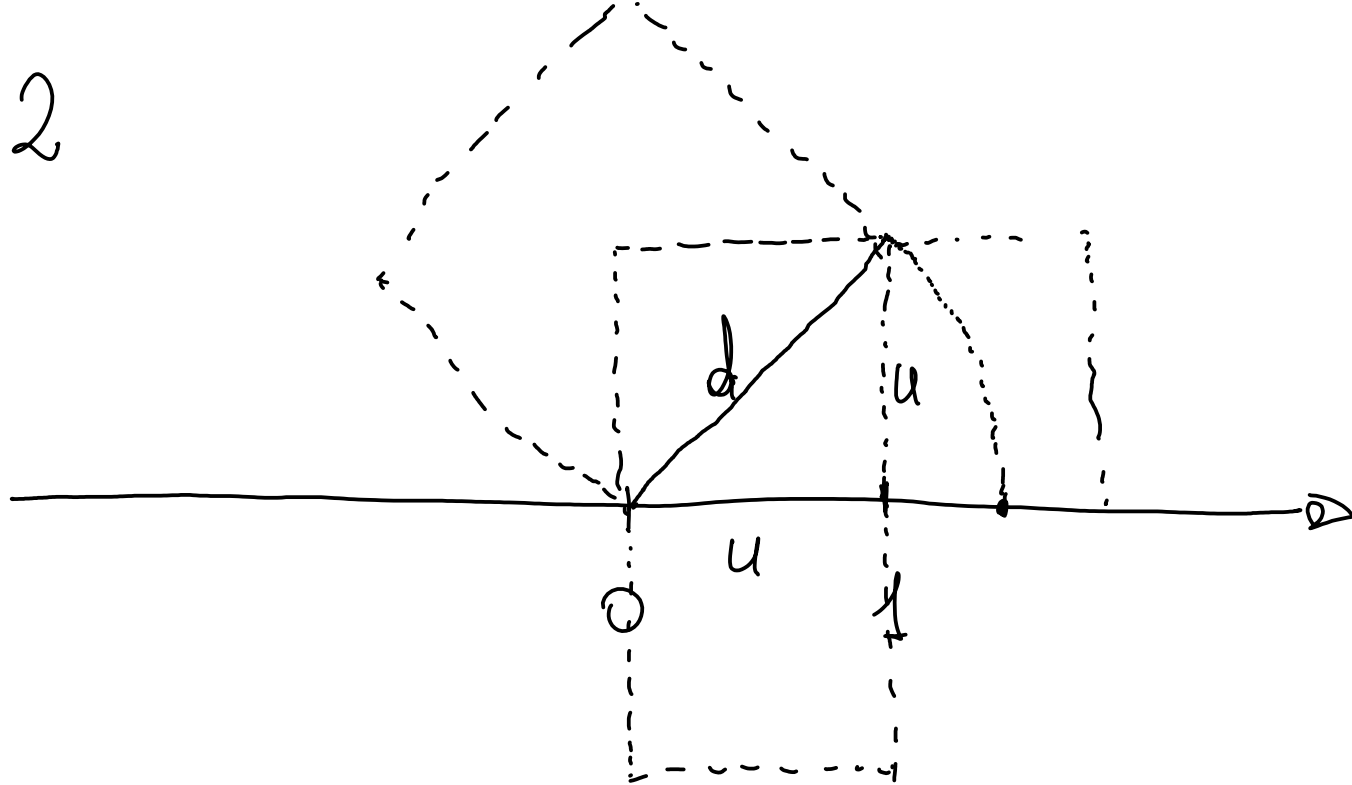
Ripetizione della lezione
del 12/10/2010

Proposizione: la rappresentazione decimale di
un qualsiasi numero $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ può essere
finita o infinita, ma se è infinita è periodica.

Rappresentazione geometrica dei numeri in $\mathbb{Q}$.



$$d^2 = u^2 + u^2 = 2$$



Teorema (dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al suo lato): non esiste $d \in \mathbb{Q}$
 tale che $d^2 = 2$ - ipotesi ↑ tesi

Dim. (per assurdo): neghiamo la tesi $\Rightarrow$ assumiamo
che $\exists d \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } d^2 = 2$

$$\Rightarrow \exists \frac{m}{n} \text{ t.c. } \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2, \text{ con } \text{H.C.D.}(m, n) = 1.$$

Allora m^2 è pari $\Rightarrow m$ è pari $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $m = 2k$.

$$2^2 k^2 = \frac{4}{2} k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n \text{ è pari.}$$

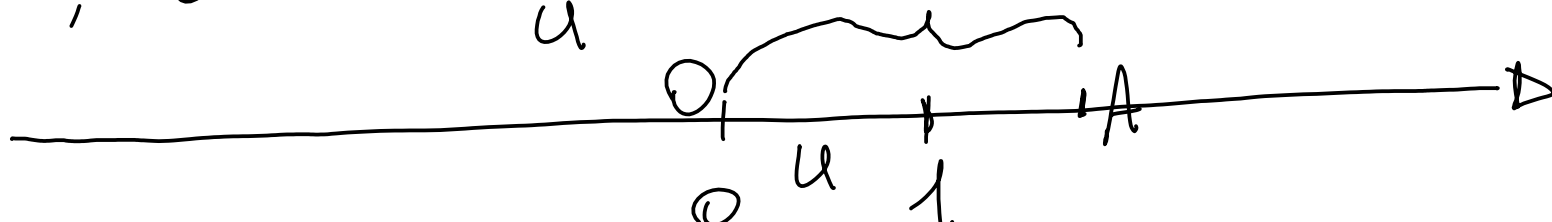
Siccome sia m che n sono pari, $\text{H.C.D.}(m, n) \geq 2$,
assurdo perché in contraddizione con $\text{H.C.D.}(m, n) = 1$. C.V.D.

Esempio di scomposizione in fattori primi.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \Rightarrow 60^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \end{array}$$

Definizione: i numeri reali (il cui insieme è denotato con $\mathbb{R}$) hanno rappresentazione decimale può essere finita o infinita, e se è infinita può essere periodica o non periodica.

Assioma di continuità: $\forall A$ sulla retta orientata, detto $d = \frac{OA}{u} \in \mathbb{R}$.



The diagram shows a horizontal line with an arrow pointing to the right. On the line, there are four points marked with vertical ticks. From left to right, they are labeled: O , u , 1 , and A . Above the line, a curly bracket spans the distance from O to A , and is labeled with the letter d .

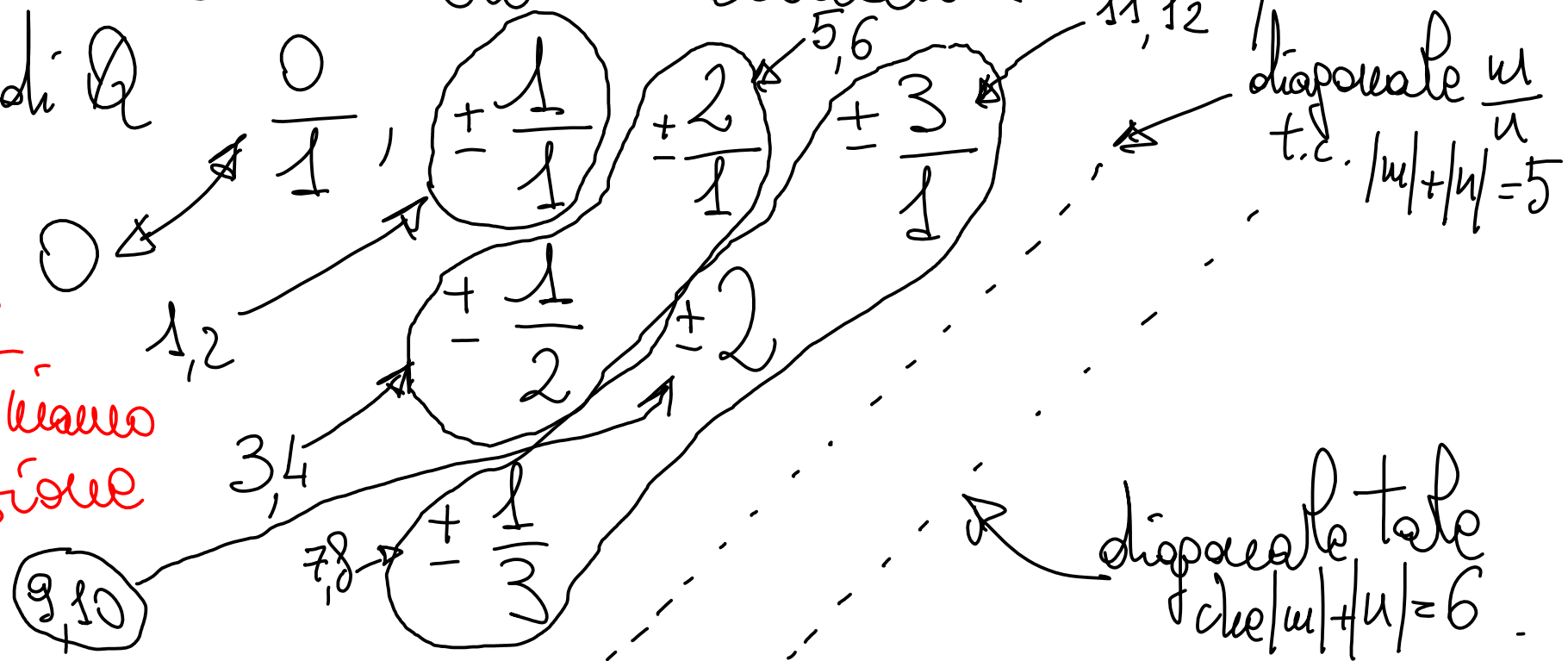
Definizione: si dice che due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità quando esiste

una relazione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

Proposizione: $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità.

Come alla dimostrazione. Costruiamo una relazione biunivoca elencando i razionali. Esempio di enumerazione di $\mathbb{Q}$.

In questo modo istituiremo una relazione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.



Teorema: $\exists$ una relazione biunivoca tra
 $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

Def.: Si dice che un insieme A ha cardinalità
superiore rispetto a un insieme B quando
esiste un insieme C che ha la stessa cardinalità
di B , $C \subset A$ (cioè $\exists a \in A$ t.c. $a \notin C$) e
 $\exists$ rel. biunivoca tra A e C .

$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Q}^3, \dots$ hanno la stessa cardinalità.
Si dicono insiemi numerabili.

Dal teorema e dalle definizioni precedenti
segue che $\mathbb{R}$ ha cardinalità superiore rispetto
ai reali -

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{C}, \mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2, \dots$ hanno la stessa
cardinalità, nota come "la potenza
del continuo".

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (cioè gli irrazionali) hanno la potenza del
continuo -