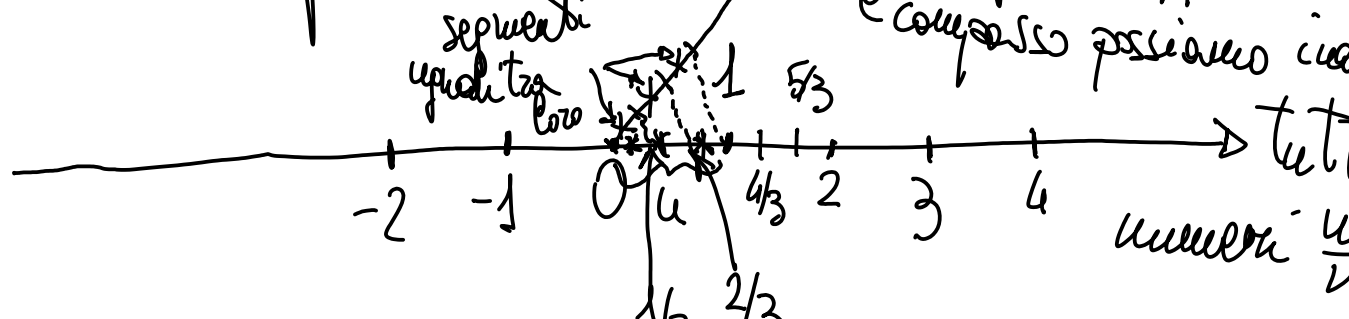


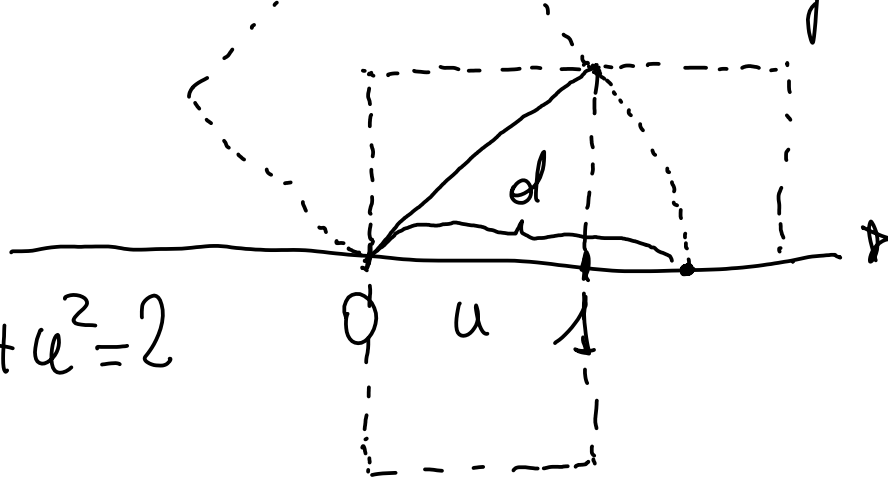
Proposizione: le rapp. decimali dei numeri $\in \mathbb{Q}$ possono essere finite (es. 1.25) o infinite ($1.\bar{6}$), ma se infinite è periodica.

Rappresentazione "geometrica" di $\mathbb{Q}$: Con riga (= coppia di squadre) e compasso possiamo individuare tutti i numeri $\frac{u}{n}$



Problema dell'incommensurabilità tra diagonale e lato di un quadrato

Il quadrato sulla diagonale (d): $d^2 = u^2 + u^2 = 2$



Teorema: il numero d tale che $d^2 = 2$ non appartiene a $\mathbb{Q}$.

Dimostrazione (per assurdo): Neghiamo la tesi, cioè

$$d \in \mathbb{Q} \Rightarrow d = \frac{u}{n} \text{ con } u, n \in \mathbb{N}, n \neq 0.$$

Possiamo assumere che $M.C.D.(u, n) = 1$.

$$\text{Siccome } d^2 = \frac{u^2}{n^2} = 2 \Rightarrow u^2 = 2n^2 \Rightarrow u \text{ è pari} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c.}$$

$$u = 2k \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n \text{ è pari}$$

$\Rightarrow M.C.D.(u, n) \geq 2$, in contraddizione con
siamo arrivati all'assurdo! Concludiamo che $d \notin \mathbb{Q}$. C.V.D.

Def.: I numeri reali sono t.c. La loro rappresentazione
decimale può essere finita o infinita e, se infinita, può essere
periodica oppure non periodica. L'insieme dei reali si denota con $\mathbb{R}$

Assioma di completezza: tutti i punti della
~~retta~~ sono rappresentabili come numeri $\in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono più dei razionali

↑
 i numeri
 irrazionali

Def.: Si dice che 2 insiemi hanno la
 stessa cardinalità quando esiste una
 relazione biunivoca tra loro.

Proposizione: $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità.

Cerco alla dimostrazione:

0 → 1/1, 1/1, 2/1, 3/1, ...
 1 → 1/2, 2/2, 3/2, ...
 2 → 1/3, 2/3, 3/3, ...
 5, 6 → 1/5, 2/5, 3/5, ...
 11, 12 → 1/11, 2/11, 3/11, ...

l'enumerazione

per diagonali con uguale
 somma tra i val. ass. num. e den.

3/4 → 1/2, 2/2

7/8 → 1/3, 2/3

copre tutti i razionali, cioè abbiamo messo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ in relazione biunivoca.

Def.: quando non si può istituire una relazione biunivoca tra 2 insiemi $A \subset B$, allora si dice che B ha cardinalità superiore rispetto ad A .

Si dimostra che $\mathbb{R}$ non possono essere messi in relazione biunivoca con $\mathbb{N}$.

→ $\mathbb{R}$ ha cardinalità superiore rispetto ai razionali.

Si dice che $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^3, \dots$ sono numerabili.

Si " " $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{C}, \dots$ hanno la potenza del continuo.