

Def. (di sommatoria): $\sum_{j=1}^n a_j := a_1 + a_2 + \dots + a_n$

dove $\{a_j\}_{j=1}^n := \{a_1, \dots, a_n\}$, con $a_j \in \mathbb{R}$

Esempio: $\sum_{j=3}^7 \frac{j^2}{j-1} = \frac{9}{2} + \frac{16}{3} + \frac{25}{4} + \frac{36}{5} + \frac{49}{6}$

Proprietà delle somme

• $\sum_{j=1}^n C \cdot a_j = C \sum_{j=1}^n a_j$ [dim. $\sum_{j=1}^n C \cdot a_j = C \cdot a_1 + C \cdot a_2 + \dots + C \cdot a_n = C \cdot (a_1 + \dots + a_n) = C \cdot \sum_{j=1}^n a_j$]
 prop. distributiva

• $\sum_{j=1}^n C = C \cdot n$ [def. di prodotto]

• $\sum_{j=1}^n a_j + b_j = \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j$ [dim. $\sum_{j=1}^n a_j + b_j = a_1 + b_1 + \dots + a_n + b_n = a_1 + \dots + a_n + b_1 + \dots + b_n = \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j$]
 prop. commutativa

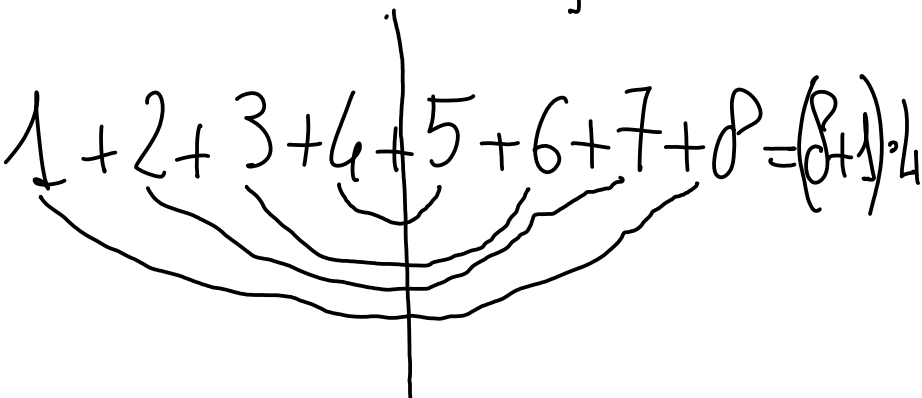
• $\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n a_{j+n}$ [dim. $\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n a_{j+n} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+n} = \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=n+1}^{n+n} a_j$]
 prop. associativa

Proposizione: $\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ vale $\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ per ogni n

$$\begin{aligned}
 \text{Dim.: } (1-q) \cdot \sum_{j=0}^n q^j &= 1 \cdot \sum_{j=0}^n q^j - q \sum_{j=0}^n q^j = \sum_{j=0}^n q^j - \sum_{j=0}^n q^{j+1} \\
 &= \sum_{j=0}^n q^j - \sum_{j=1}^{n+1} q^j = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1} \\
 &= 1 - q^{n+1} \Rightarrow (1-q) \cdot \sum_{j=0}^n q^j = 1 - q^{n+1} \Rightarrow \sum_{j=0}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
 \end{aligned}$$

Proposizione: $\sum_{j=1}^n j = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Esempio (per capire ): $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{(8+1) \cdot 8}{2}$



Dim. (per induzione): Dimostriamo l'affermazione per "il primo valore di n ", cioè $n=1$.

$$\sum_{j=1}^1 j = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{si!}$$

Assumiamo che l' enunciato sia vero per n , cerchiamo di dimostrarlo per $n+1$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} j &= \left(\sum_{j=1}^n j \right) + n+1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n+1 = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \\ &= (n+1) \cdot \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \quad \text{Verificato C.V.D.} \end{aligned}$$

Def. (fattoriale): $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

Con il simbolo di $\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \rightarrow n! = \prod_{j=1}^n j$. Poiché $0! = 1$

Def. (di coefficienti binomiali $c_{n,j}$): $c_{n,j}$ sono tali che

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n c_{n,j} a^j b^{n-j} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

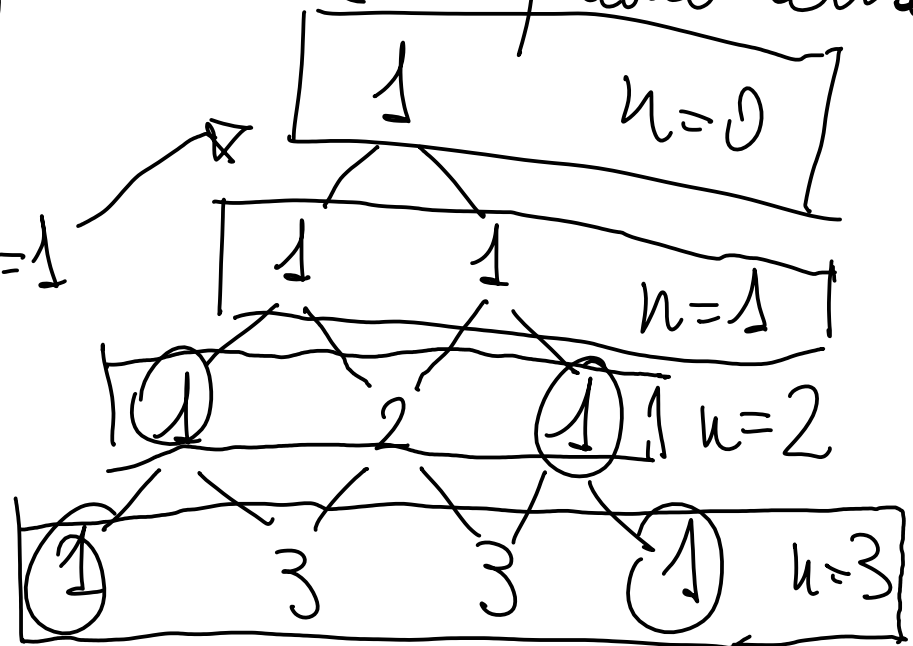
Proposizione: $c_{n,j} = \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (j+1)}{(n-j) \cdot (n-j-1) \cdot \dots \cdot 1}$

Teorema: $c_{n,j}$ sono i coefficienti che compaiono nell'albero di Tartagliola

$$(a+b)^0 = 1 = c_{0,0} \Rightarrow c_{0,0} = 1$$

$$\text{assumiamo } (a+b)^n = \sum_{j=0}^n c_{n,j} a^j b^{n-j}$$

con $c_{n,0}, \dots, c_{n,n}$ noti

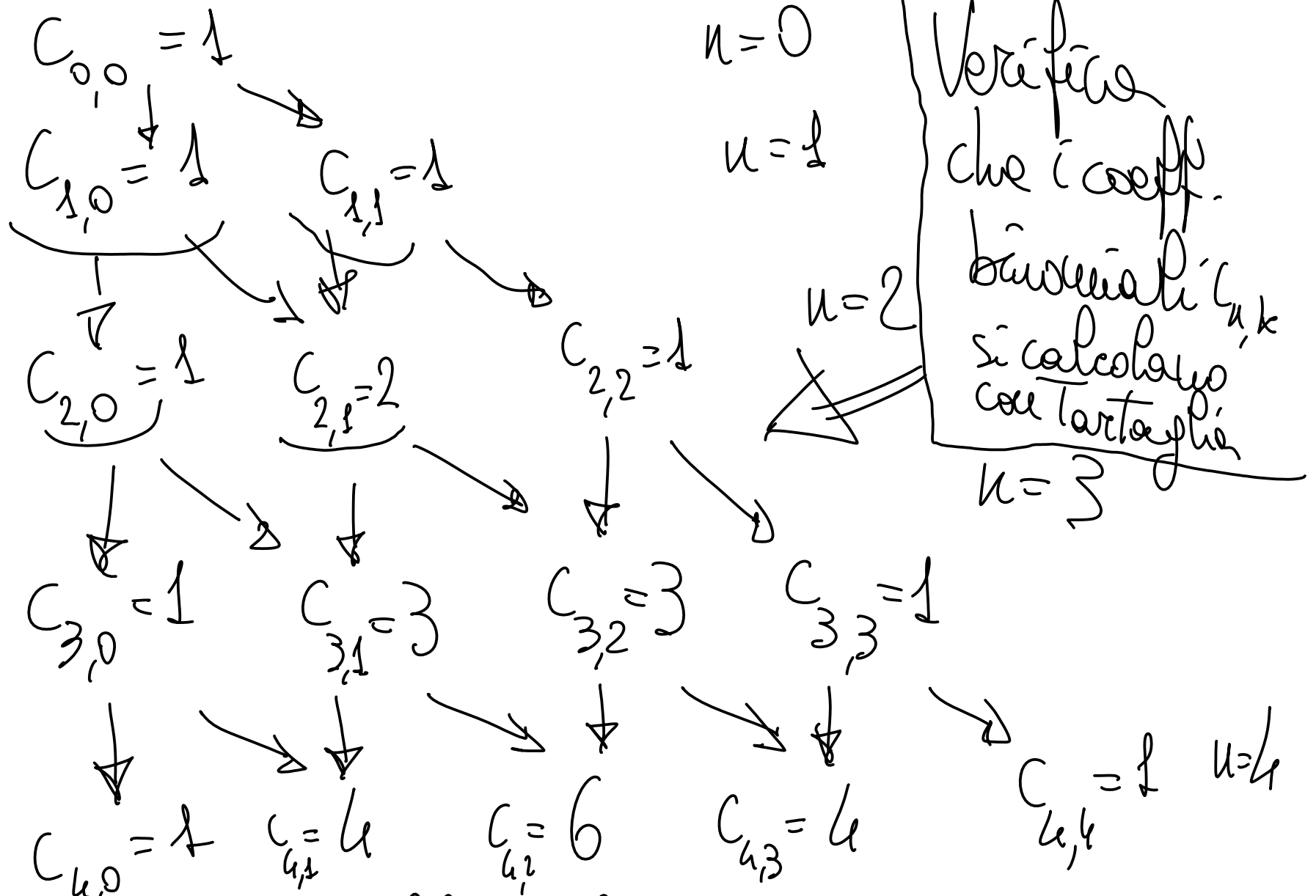


$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \cdot \sum_{j=0}^n C_{n,j} a^j b^{n-j} \\
 &= \sum_{j=0}^n C_{n,j} a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^n C_{n,j} a^j b^{n+1-j} \\
 &= C_{n,n} a^{n+1} + \sum_{j=1}^n C_{n,j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{j=1}^n C_{n,j} a^j b^{n+1-j} + C_{n,0} b^{n+1} \\
 &= \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1,j} a^j b^{n+1-j} = C_{n+1,0} b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} C_{n+1,j} a^j b^{n+1-j} + C_{n+1,n+1} a^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$C_{n+1,0} = C_{n,0}$$

$$C_{n+1,n+1} = C_{n,n}$$

$$C_{n+1,j} = C_{n,j-1} + C_{n,j}$$



Ripartiamo dalla relazione che definisce i coeff. binomiali:

$$C_{n+1,j} = C_{n,j-1} + C_{n,j}$$

con la def. "all'esterno del triang. Tartaglia".

cioè $C_{n+1,0} = C_{n+1,n+1} = 1$
 Vogliamo provare $\rightarrow C_{n,j} = \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (j+1)}{(n-j) \cdot (n-j-1) \cdot \dots \cdot 1}$

Procediamo per induzione: controlliamo il caso base dell'induzione cioè quando $n=0$

$\Rightarrow C_{0,0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$ (se volete, per $n=1$, $C_{1,0} = C_{1,1} = \frac{1!1!}{0!1!}$)

Supponiamo che l'espressione nel riquadro sia vera $\forall j=0, \dots, n$,
 vogliamo verificare che vale anche per $C_{n+1,j}$ con $j=0, \dots, n+1$.

È banale per $C_{n+1,0} = C_{n+1,n+1} = \frac{n+1!}{0!(n+1)!} = 1 \cdot \forall j=1, \dots, n$

$C_{n+1,j} = C_{n,j-1} + C_{n,j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (j+1)}{(n-j+1) \cdot (n-j) \cdot \dots \cdot 1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (j+1)}{(n-j) \cdot (n-j-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n \cdot \dots \cdot (j+1)}{(n-j) \cdot \dots \cdot 1} \cdot \left(\frac{j}{n-j+1} + 1 \right)$

$$= \frac{n \cdot \dots \cdot (j+1)}{(n-j) \cdot \dots \cdot 1} \cdot \frac{n+1}{n-j+1} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot (j+1)}{(n-j+1) \cdot \dots \cdot 1} = C_{n+1, j} = \frac{(n+1)!}{j!(n-j)!}$$

C.V.D.

Il metodo più rapido per calcolare i coeff. binomiali è basato sulla seguente osservazione:

$$C_{n,0} = 1, \quad C_{n,j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (j+1)}{(n-j) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n-j+1}{j} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot j}{(n-j+1) \cdot (n-j) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n-j+1}{j} C_{n,j-1}$$

Esempio: $n=8$, $C_{8,0}=1$, $C_{8,1}=\frac{8}{1} \cdot 1=8$, $C_{8,2}=\frac{7}{2} \cdot 8=28$, $C_{8,3}=\frac{5}{3} \cdot 28=56$, $C_{8,4}=70$