

I Esame 2018

pag. 1

Calcolo 1 x Sc. dei Materiali
Analisi 1 x Chim. Applicata

$$(1A) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[Ch(x) \right]^{1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x}} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}}) \log Ch(x)}$$

Studiamo separatamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \log Ch(x) = \text{usando } (1 + \varepsilon(x))^\alpha - 1 \sim \varepsilon(x) \text{ per } \varepsilon(x) \rightarrow 0,$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2x} \log \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2x} \left[x + \log \left(\frac{1 + e^{-2x}}{2} \right) \right]$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\log(1 + e^{-2x}) - \log 2}{x} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[Ch(x) \right]^{1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(1B) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1) \log x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{1 + (x-1)} - 1) \log[1 + (x-1)]}{(x-1)^2}$$

usando i limiti notevoli (con la relazione di asintotico)
 $(1 + \varepsilon(x))^\alpha - 1 \sim \alpha \varepsilon(x)$ per $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ e $\log(1 + \varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$ per $\varepsilon(x) \rightarrow 0$,
abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1) \log x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3} \cdot \cancel{(x-1)} \cdot \cancel{(x-1)}}{(\cancel{x-1})^2} = \frac{1}{3} \quad \text{pag. 2}$$

(2) Si determinino c e α tali che vale la relazione

$$1 - \cos\left(\sqrt[4]{\frac{n}{n^3+1}}\right) \sim \frac{c}{n^\alpha} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Osserviamo che, per $n \rightarrow +\infty$, $\sqrt[4]{\frac{n}{n^3+1}} \rightarrow 0$ e ricordiamo che $1 - \cos(\varepsilon(x)) \sim \frac{(\varepsilon(x))^2}{2}$ per $\varepsilon(x) \rightarrow 0$,

ne segue che

$$1 - \cos\left(\sqrt[4]{\frac{n}{n^3+1}}\right) \sim \frac{\sqrt[4]{\frac{n}{n^3+1}}}{2} = \frac{1}{2n} \frac{\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[4]{n^3+1}} = \frac{1}{2n} \sqrt[4]{\frac{1}{1+1/n^3}} \sim \frac{1}{2n},$$

quindi i valori richiesti sono $c = 1/2$, $\alpha = 1$.

(3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

(3A) Si calcoli $f'(0)$.

(3B) Si calcoli $f''(0)$.

Utilizzando la definizione di derivata
come limite del rapporto incrementale

pag. 3

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cosh h) \sinh h}{h^2}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sinh h = 0.$$

Per poter risolvere l'esercizio (3B) è necessario
calcolare preliminarmente $\forall x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{x [\sin^2 x + (1 - \cos x) \cos x] - (1 - \cos x) \sin x}{x^2}$$
$$= \frac{x \cos x + x (\sin^2 x - \cos^2 x) - \sin x + \sin x \cos x}{x^2}.$$

Possiamo ora determinare $f''(0)$, calcolando

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cosh h + h (\sinh^2 h - \cosh^2 h) - \sinh h (1 - \cosh h)}{h^3}$$

applicando il teorema di de l'Hospital,

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{\cosh h} + \cancel{\sinh^2 h} - \cancel{\cosh^2 h} + h \sinh h + 4h \sinh h \cosh h - \cancel{\cosh h} + \cancel{\cosh h} - \cancel{\sinh h}}{3h^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sinh h}{h^2} \cdot \frac{(4 \cosh h - 1)}{3} = 1 \cdot \frac{4 - 1}{3} = 1.$$

(4) Si consideri la funzione

pag. 4

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + (x^2+1)^2 - 4.$$

(4A) Si verifichi che il grafico di $f(x)$ interseca due sole volte l'asse delle ascisse.

(4B) Si determini un intervallo $[\alpha, \beta]$ t.c. la sol. positiva $\bar{x}$ di $f(x) = 0$ soddisfi la rel. $\bar{x} \in (\alpha, \beta)$ con $\beta - \alpha \leq 1/4$.

Osserviamo innanzitutto che

$$f(-x) = f(x),$$

cioè f è pari. Inoltre, $f(0) = 2 + 1 - 4 = -1$

e $f(x) \sim x^4$ per $x \rightarrow \pm\infty$, quindi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Applicando il teorema degli zeri agli intervalli

$[-\pi, 0]$ e $[0, \pi]$ con π abbastanza grande

affinché $f(\pi) > 0$, siamo più sicuri che

$f(x)$ ammette almeno due soluzioni.

Per verificare che non esistano altre soluzioni, studiamo il segno di $f'(x)$.

Calcoliamo $f'(x) = \frac{-2 \cdot 2x}{2\sqrt{(1+x^2)^3}} + 4x(x^2+1)$

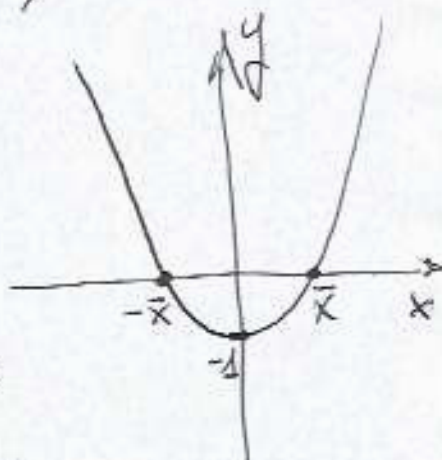
pag. 5

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \frac{2(x^2+1)^{5/2} - 1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Siccome $x^2+1 \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}$, allora il denominatore della frazione (che compare nell'espressione di $f'(x)$) è sempre positivo; inoltre, anche il numeratore è sempre positivo, ~~quindi~~ poiché $2(x^2+1)^{5/2} - 1 \geq 2 \cdot 1^{5/2} - 1 \geq 1$.

Ne segue che $f'(x) > 0$ per $x > 0$.

Siccome $f(x)$ è crescente per $x > 0$ e $f(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la soluzione



$\bar{x} > 0$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$ è unica per valori

positivi. Le soluzioni non possono che essere $\pm \bar{x}$. Qui sopra c'è un rotto grafico della funzione.

Per localizzare $\bar{x}$, osserviamo che $f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} > 0$ e procediamo per bisezione nell'intervallo $[a_0, b_0]$ con $a_0 = 0, b_0 = 1$.

Poniamo $x_1 = (a_0 + b_0)/2 = 1/2$, siccome $f(1/2) \approx -0.65 < 0 \Rightarrow a_1 = x_1 = 1/2, b_1 = b_0 = 1$.

" $x_2 = (a_1 + b_1)/2 = 3/4$, siccome $f(3/4) \approx 0.04 > 0 \Rightarrow a_2 = a_1 = 1/2, b_2 = b_1 = 3/4$.

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1/2, \beta = 3/4}$$