I esonero di Calcolo 1 / Analisi 1
5/12/2017

(1) Si determinino tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione:

$$z^8 - z^4 - 2 = 0$$

E' conveniente introdurre la variabile ausiliaria

$$t = z^4,$$

allora l'eq. precedente diventa

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

che ammette $t_1 = -1$ e $t_2 = 2$ come soluzioni.

Dobbiamo quindi risolvere le 2 eq.

$$z^4 = -1 \qquad \text{e} \qquad z^4 = 2.$$

Consideriamo la prima di queste. Riscrivendola nella forma $z^4 = e^{i\pi}$, le cui soluzioni $z = \rho e^{i\theta}$ devono essere t.c.

$$\rho^4 = 1 \qquad 4\theta = \pi + 2k\pi .$$

Otteniamo quindi che le 4 soluzioni di $z^4 = -1$

sono

$$z_1 = e^{i\pi/4}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}},$$

che, riespresse in forma algebrica, sono

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Le soluzioni dell'eq. $z^4 = 2$ sono

$$z_5 = \sqrt[4]{2}, \quad z_6 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\pi/2}, \quad z_7 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\pi}, \quad z_8 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{3\pi}{2}},$$

cioè in forma algebrica

$$z_5 = \sqrt[4]{2}, \quad z_6 = i\sqrt[4]{2}, \quad z_7 = -\sqrt[4]{2}, \quad z_8 = -\sqrt[4]{2}\, i.$$

(2a) Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{Sh}(x) - x}{(1-\cos\sqrt{x})(\sqrt{1+x^2}-1)}$$

Sfruttando le relazioni ~~più~~ di asintotico di alcuni limiti notevoli, possiamo scrivere

$$1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{x}{2}, \quad \sqrt{1+x^2}-1 \sim \frac{1}{2}x^2,$$

quindi il limite richiesto dal testo dell'eserci-

ZEo può essere posto nella forma assai più semplice

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{Sh(x)-x}{(1-\cos\sqrt{x})(\sqrt{1+x^2}-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{Sh(x)-x}{\frac{x^3}{4}}$$

, che può essere risolto anche applicando (tre volte consecutive) la regola di de l'Hospital.

Alternativamente, scriviamo lo sviluppo della formula di Taylor:

$$Sh(x) = \cancel{Sh(0)} + \frac{Ch(0)}{1!}x + \cancel{\frac{Sh(0)}{2!}x^2} + \frac{Ch(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

, da cui segue che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{Sh(x)-x}{(1-\cos\sqrt{x})(\sqrt{1+x^2}-1)} = 4\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} =$$

$$= 4\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cancel{x^3}}{6}}{\cancel{x^3}} + 4\lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{2}{3} + 4\cdot 0 = \frac{2}{3}$$

(2b) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{[\log(1+x)]\log x}$$

Per quanto riguarda il numeratore, è utile ricordare che

$$x^x - 1 = e^{x\log x} - 1 \sim x\log x,$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $x \cdot \log x$ è un infinitesimo, poiché $\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\log y}{y} = 0^-$.

Inoltre, è ben noto che

$$\log(1+x) \sim x \quad \text{per } x \to 0.$$

Sfruttando le suddette relazioni di asintotico, il calcolo del limite diventa semplice:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x^x-1}{x\log x}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}\cdot\frac{\cancel{x\log x}}{\cancel{x\log x}}\right] = 1.$$

— o —

(3) Si determinino c e α tali che

$$\sqrt{n^{3/2}+1} - \sqrt{n^{3/2}-1} \sim \frac{c}{n^{\alpha}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

È conveniente moltiplicare "sopra e sotto" l'elemento della successione per il fattore $\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}$, in questo modo si ottiene che

$$\sqrt{n^{3/2}+1} - \sqrt{n^{3/2}-1} = \frac{\cancel{n^{3/2}}+1-(\cancel{n^{3/2}}-1)}{\sqrt{n^{3/2}+1}+\sqrt{n^{3/2}-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^{3/2}+1}+\sqrt{n^{3/2}-1}} \sim \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{2}\sqrt{n^{3/2}}},$$

dove abbiamo sfruttato l'ovvia relazione $\sqrt{n^{3/2}\pm 1} \sim n^{3/4}$ per $n\to+\infty$.

Di conseguenza, abbiamo che $\boxed{c = 1 \quad e \quad \alpha = 3/4}$.

---

(4) Si verifichi che $f(x) = Sh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}$ interseca 2 sole volte l'asse delle ascisse.

(4a) Inoltre, facoltativamente, si determinino α e β t.c. $\beta - \alpha < \frac{1}{10}$ e $\bar{x} \in (\alpha, \beta)$, con $\bar{x} > 0$ e $f(\bar{x}) = 0$.

Osserviamo che $f: D \to \mathbb{R}$, dove

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Inoltre, f è evidentemente dispari, cioè

$$f(-x) = Sh(-1/x) + \frac{2}{x} = -Sh(1/x) + \frac{2}{x} = -f(x).$$

Cerchiamo quindi di risolvere $f(x) = 0$ in $\mathbb{R}_+$.

Calcoliamo "i limiti alla frontiera":

$$\lim_{x \to 0^+} \left[Sh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}\right] = \lim_{y \to +\infty} \left[Sh(y) - 2y\right] =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{2} - 2y = +\infty,$$ dove abbiamo effettuato il cambio di variabile $y = 1/x$ e abbiamo ricordato che $Sh(y) \sim \frac{e^y}{2}$ per $y \to +\infty$.

Inoltre, $\lim_{x \to +\infty} Sh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + o(1/x) - \frac{2}{x} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} -1/x + o(1/x) = 0^-.$$

Calcoliamo ora la derivata, cioè

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,Ch(1/x) - \left(-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{2 - Ch(1/x)}{x^2}$$

e studiamone il segno. Abbiamo che

$$f'(x) \gtreqless 0 \quad \text{se e solo se} \quad 2 \gtreqless Ch(1/x)$$

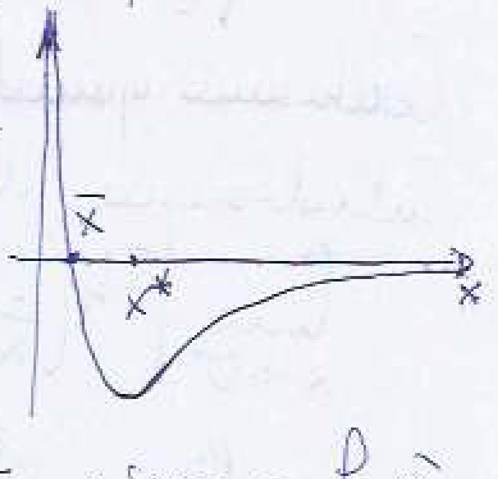
Osserviamo che $Ch(1/x)$ è una funzione monotona ~~sempre~~ decrescente (poiché $Ch(y)$ è monotona ~~sempre~~ crescente per $y>0$) e che $\lim_{x\to 0^+} Ch(1/x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} Ch(1/x) = 1$, quindi

$$\exists!\ x^* > 0 \text{ t.c. } Ch\left(1/x^*\right) = 2.$$

Allora, $f'(x) > 0$ per $x > x^*$ e $f'(x) < 0$ per $0 < x < x^*$.

Il grafico di f, per $x>0$, non può che essere come quello disegnato a destra. Pertanto $\exists!\ \overline{x} > 0$ t.c.

$$f(\overline{x}) = 0.$$



L'altra soluzione, ovviamente è $-\overline{x}$, siccome f è dispari. Per avere un'idea del valore di $\overline{x}$ è utile valutare x^* (se la propria calcolatrice ha la funzione $arcCh(x) = Ch^{-1}(x)$), cioè $1/x^* = arcCh(2) \simeq 1.317 \Rightarrow x^* \simeq 0.76$.

Procediamo ~~da~~ per bisezione, a partire dalla prima valutazione di $f(1)$.

Siccome $f(1) \simeq -0.825$, allora dal grafico segue che $\overline{x} \in (0,1)$. PAG. 7

Siccome $f(\cancel{1/2}) \simeq -0.37$, " " " " " $\overline{x} \in (0, 1/2)$.

Siccome $f(1/4) \simeq 19.3$, " " " " " $\overline{x} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Siccome $f(3/8) \simeq 1.83$, " " " " " $\overline{x} \in \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$

Siccome $f(7/16) \simeq 0.294$, " " " " " $\overline{x} \in \left(\frac{7}{16}, \frac{1}{2}\right)$.

Poniamo allora $\alpha = \frac{7}{16} = 0.4375$ e $\beta = \frac{1}{2} = 0.5$,

α e β soddisfano le richieste, poichè

$$\overline{x} \in (\alpha, \beta) \quad \text{e} \quad \beta - \alpha = 0.0625 < 1/10.$$