I° compito di esonero
a. a. 2015/16

1) Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$z^5 + |z| \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 0$$

Poniamo l'equazione nella seguente forma

$$z^5 = -\left(1 + \sqrt{3}\, i\right) |z| \Rightarrow \rho^5 e^{i5\theta} = 2 \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi} \rho$$

dove abbiamo introdotto la formula di Eulero per i num. complessi (cioè $z = \rho e^{i\theta}$) e abbiamo osservato che

$$1 + \sqrt{3}\, i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2\, e^{i\pi/3}$$

$$\Rightarrow -\left(1 + \sqrt{3} i\right) = -2\, e^{i\pi/3} = 2\, e^{i4\pi/3}$$

Nell'eq. $\rho^5 e^{i5\theta} = 2\, e^{i4\pi/3} \rho$, separiamo la parte che riguarda i moduli da quella riguardante le fasi:

$$\rho^5 = 2\rho$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \cdot (\rho^4 - 2) = 0$$

$$\rho = 0 \qquad \rho^4 = 2 \Rightarrow \rho = 2^{1/4}$$

$$e^{i5\theta} = e^{i4\pi/3}$$

$$\Downarrow$$

$$5\theta = 4\pi/3 \mod 2\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \frac{4\pi}{15},\ \frac{4\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi + \frac{2\pi}{5} = \frac{16}{15}\pi,$$
$$\frac{16}{15}\pi + \frac{2\pi}{5} = \frac{22}{15}\pi,\ \frac{22}{15}\pi + \frac{2\pi}{5} = \frac{28}{15}\pi$$

Riassumendo, otteniamo 6 soluzioni dell'eq. di partenza (che qui di seguito scriviamo in forma di Eulero):

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 2^{1/4} \cdot e^{i\,4\pi/15}, \quad z_2 = 2^{1/4} \cdot e^{i\,2\pi/3},$$

$$z_3 = 2^{1/4} \cdot e^{i\,16\pi/15}, \quad z_4 = 2^{1/4}\, e^{i\,22\pi/15}, \quad z_5 = 2^{1/4}\, e^{i\,28\pi/15}.$$

3a) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\operatorname{Ch} x - 1)}{\sin^2 x \cdot \log(1+x)}$$

Questo limite si presenta nella forma di indeterminazione 0/0, potrebbe essere affrontato con il ~~regola~~ teorema di de l'Hospital, ma il calcolo delle derivate andrebbe iterato diverse volte. Cerchiamo allora di utilizzare i limiti notevoli nella forma asintotica, cioè

per $x \to 0$

$$\begin{cases} \sqrt{1+x}-1 \sim x/2 \\ \operatorname{Ch} x - 1 = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = \dfrac{e^x - 1}{2} + \dfrac{e^{-x}-1}{2} \\ \qquad = \dfrac{1}{2}\left[\cancel{x} + x^2/2 - \cancel{x} + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right] \sim \dfrac{x^2}{2} \\ \sin x \sim x \\ \log(1+x) \sim x \end{cases}$$

Di conseguenza, possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\operatorname{Ch} x - 1)}{\sin^2 x \cdot \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x/2)\cdot(x^2/2)}{x^2 \cdot x} = 1/4$$

3b) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{Sh}\, x)^{\sqrt{x^2+1}/x^2\log x}$$

È conveniente riscrivere il limite nella forma seguente:

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{Sh}\, x)^{\sqrt{x^2+1}/x^2\log x} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2\log x}\cdot \log(\mathrm{Sh}\, x)\right],$$

per poi studiare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2\log x}\log(\mathrm{Sh}\, x)$$

Osserviamo che $\mathrm{Sh}\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \sim \frac{e^x}{2}$ per $x\to+\infty$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2\log x}\log(\mathrm{Sh}\, x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+1/x^2}\cdot(\log e^x - \log 2)}{x^{\cancel{2}}\cdot \log x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log e^x}{x\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\log x} = 0$$

Ritornando al limite proposto nel testo dell'esercizio, abbiamo quindi che

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{Sh}\, x)^{\sqrt{x^2+1}/x^2\log x} = e^0 = 1 .$$

3c) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^{2x}-1)\cdot \log x}{x^4-2x^2+1}$$

E' conveniente riscrivere il limite nella forma seguente:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^{2x}-1)\log[1+(x-1)]}{(x^2-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\left\{[1+(x-1)]^{2[(x-1)+1]}-1\right\}\log[1+(x-1)]}{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}.$$

Effettuiamo il cambio di variabile

$y = x-1 \Rightarrow x = y+1$, quindi possiamo riscrivere il limite proposto (come esercizio) nella forma seguente:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\left[(1+y)^{2(y+1)}-1\right]\log(1+y)}{y^2\cdot(2+y)^2}.$$

Osserviamo che $(1+y)^{2(y+1)}-1 \sim 2y$ per $y\to 0$ e ricordiamo che $\log(1+y)\sim y$ per $y\to 0$.

Qualora si volesse verificare che $(1+y)^{2(y+1)}-1\sim 2y$ per $y\to 0$, basta usare opportunamente il teorema di de l'Hospital, infatti,

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{2(y+1)}-1}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\frac{d}{dy}e^{2(y+1)\log(1+y)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1}{\cancel{2}}(1+y)^{2(y+1)}\cdot\cancel{2}\left[\log(1+y)+\frac{\cancel{1+y}\,1}{\cancel{1+y}\,1}\right] = 1.$$

Immettendo le 2 relazioni asintotiche nel limite per $y\to 0$ si ottiene

$$\lim_{y\to 0}\frac{\left[(1+y)^{2(y+1)}-1\right]\log(1+y)}{y^2(2+y)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{2\cancel{y}\cdot\cancel{y}}{\cancel{y^2}(2+y)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

2a) Determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{3/2}\left[Sh(1/n) - \sin(1/n)\right]$$

Espandiamo in serie di Taylor la funzione
$$Sh\,x - \sin x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \sin x\,;$$
siccome
$$D\left(Sh\,x - \sin x\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \cos x\,,$$
$$D^2\left(Sh\,x - \sin x\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sin x\,,$$
$$D^3\left(Sh\,x - \sin x\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \cos x\,,$$
allora otteniamo che
$$Sh\,x - \sin x = \frac{2}{3!}\,x^3 + o\left(x^3\right) \sim \frac{1}{3}\,x^3 \text{ per } x \to 0.$$
Di conseguenza possiamo scrivere che per il termine generale della serie vale la relazione
$$n^{3/2}\left[Sh(1/n) - \sin(1/n)\right] \sim \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}} \text{ per } n \to +\infty.$$
Siccome $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ è convergente (si ricordi che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^{\alpha}$ converge per $\alpha > 1$), allora la serie proposta nel testo dell'esercizio è a sua volta convergente, per il criterio del confronto asintotico.

2b) Si discuta il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} c_n x^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R} \setminus \{4, -4\}$, dove c_n è definita ricorsivamente come segue:

$$c_0 = 1 \quad e \quad c_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot c_{n-1} \quad \forall\, n \geq 1.$$

Facoltativamente, si discutono anche i casi $x = \pm 4$.

Per applicare il criterio del rapporto alla convergenza assoluta, cominciamo a studiare il

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \quad \text{dove } a_n = \frac{(-1)^n}{4^n} c_n \cdot x^n.$$

Abbiamo che

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{4} \cdot \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{|x|}{4} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{|x|}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) \to \frac{|x|}{4}$$

per $n \to +\infty$. Ne segue che

se $|x| < 4$ (ovvero $-4 < x < 4$), allora la serie di partenza è assolutamente convergente, per il criterio del rapporto, quindi tale serie è convergente.

se $|x| > 4$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è divergente, da ciò non segue la divergenza della serie di partenza.

~~Nel~~ caso in cui $x<-4$, allora ~~che~~ $a_n = |a_n|$ e quindi la serie è divergente. Se $x>4$, osserviamo che la serie è a segni al terni; siccome $|a_n| \to +\infty$ per $n \to +\infty$ (di nuovo, si tratta di osservare che $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq r > 1$ definitivamente, quindi $|a_n| \geq C r^n$ con $C>0$ opportuno), allora a_n non converge a 0 e, di conseguenza, la serie di partenza è non convergente.

Trattiamo ora i casi facoltativi, cioè quelli con $x = \pm 4$.
Osserviamo che, per definizione,

$$c_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \cdot c_{n-1} < c_{n-1},$$

quindi la successione $\{c_n\}$ è monotona decrescente.
Inoltre, $c_n = e^{\log\left(1-\frac{1}{2n}\right) + \log c_{n-1}} = \ldots = e^{\sum_{j=1}^{n} \log\left(1-\frac{1}{2j}\right)}$

Siccome $\log\left(1-\frac{1}{2j}\right) \sim -\frac{1}{2j}$ per $j \to +\infty$, allora

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \log\left(1-\frac{1}{2j}\right) = -\infty$$ per il criterio del confronto asintotico, quindi

$$c_n = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \log\left(1-\frac{1}{2j}\right)\right) \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

~~Per~~ Quando $x=4$, allora
$a_n = (-1)^n c_n$, ma c_n è decrescente e $c_n \to 0$ per $n \to +\infty$,

quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge per il criterio di Leibnitz.

Nel caso con $x=-4$, la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

il cui carattere si determina solo dopo aver osservato che

$$c_n = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \log\left(1-\frac{1}{2j}\right)\right) \sim b/n,$$

per qualche opportuna costante $b>0$, ma ciò si può verificare solo ~~dopo~~ utilizzando delle tecniche che si apprendono a fine corso. Questo caso è quindi troppo difficile per essere compreso a livello del primo esonero ecco perché il testo di questo esercizio è stato limitato (per l'esonero stesso) al caso $x\in\mathbb{R}^+$.

2c) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\left[\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

Ci sono diversi modi per affrontare la discussione di questa serie: ad esempio, un metodo molto veloce consiste nell'osservare che

$$\sum_{n=1}^{k} (-1)^n\left[\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^n}{n} - 4\sum_{n=1}^{k}\left[(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)\right],$$

per poi dimostrare che entrambe le somme parziali convergono per $k \to +\infty$ ($\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n/n$ è convergente per il criterio di Leibniz, mentre $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)\right]$ è assolutamente convergente per il criterio del confronto asintotico).

Dopo aver abbozzato (un po' velocemente ma in modo completo) un metodo abbastanza veloce, discutiamo ora in tutti i dettagli un secondo metodo che è un po' più veloce, ma forse è più intuitivo.

Cominciamo dall'ovvia osservazione che la serie proposta dal testo è a segni alterni. Ponendo

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3},$$

si ottiene che la serie proposta nel testo dell'esercizio si può scrivere come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

Per poter applicare il teorema di Leibniz dobbiamo dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (e questo è ovvio) e che a_n è definitivamente monotona decrescente.

Osserviamo che $f(n) = a_n$ dove $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3}$.

Anziché studiare la monotonia di a_n è più facile farlo per la funzione f; calcoliamone infatti la derivata:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^4} = -\frac{1}{x^4}(x^2 - 8x + 12) \Rightarrow f'(x) = -\frac{(x-2)\cdot(x-6)}{x^4} \geq 0$$

quando $x \in (2,6)$, mentre f è decrescente per $x < 2$ e $x > 6$.

Conseguentemente a_n è sicuramente monotona decrescente per $n \geq 6$ (quindi è definitivamente decrescente e, ricordiamo, convergente a 0). Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge per Leibniz!