I prova d'esonero 9/12/2016

1) Si determinino tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$8z^6 - 63z^3 - 8 = 0$$

E' conveniente introdurre la variabile ausiliaria

$$u = z^3,$$

per cui $8u^2 - 63u - 8 = 0$

le soluzioni rispetto a u sono

$$u_{1,2} = \frac{63 \pm \sqrt{63^2 + 256}}{16} = \frac{63 \pm 65}{16} = \begin{cases} -1/8 \\ 8 \end{cases}$$

Siamo quindi ricondotti alla ricerca delle soluzioni di queste due equazioni:

$$z^3 = 8 \quad \text{e} \quad z^3 = -1/8 .$$

E' conveniente scrivere z in forma trigonometrica. Consideriamo separatamente la prima equazione, quindi abbiamo

$$(\rho e^{i\theta})^3 = 8 \Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[3]{8} = 2 \\ 3\theta = 2k\pi \quad \forall k = 0,1,2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

Abbiamo quindi ottenuto le prime tre soluzioni $z_1 = 2$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

Consideriamo ora la seconda equazione, cioè

$$z^3 = -1/8,$$

da cui

$$\left(\rho e^{i\vartheta}\right)^3 = -1/8 \Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1/8 \Rightarrow \rho = 1/2 \\ 3\vartheta = \pi + 2k\pi \quad \forall k = 0,1,2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta = \pi/3,\ \pi,\ \frac{5\pi}{3}$$

Abbiamo quindi le altre tre radici dell'equazione di partenza, che sono

$$z_4 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4},$$

$$z_5 = \frac{1}{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

$$z_6 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

(2a) Si determini il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-1/n} - 1 - \log(1+1/n)}{\mathrm{Ch}\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Anche ricordando i ~~...~~ limiti notevoli si possono scrivere facilmente le seguenti ~~sviluppi~~ espansioni di Taylor:

$$\left.\begin{aligned} e^x - 1 &= x + o(x) \\ \log(1+x) &= x + o(x) \end{aligned}\right\} \text{per } x \to 0$$

Di conseguenza, abbiamo che

$$e^{-1/n} - 1 - \log(1 + 1/n) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + o(1/n) \sim -\frac{2}{n}$$

per $n \to +\infty$.

Inoltre, è facile controllare che

$Ch(x) \to 1$ per $x \to 0$, quindi

$Ch(1/n) \to 1$ per $n \to +\infty$.

In definitiva, possiamo affermare che il termine generale della serie

$$\frac{e^{-1/n} - 1 - \log(1+1/n)}{Ch(1/n)} \sim -\frac{2}{n}.$$

Siccome $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{n} = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente (essendo un multiplo della serie armonica), allora anche la serie di partenza è divergente, per il criterio del confronto asintotico.

Osservazione: per risolvere questo esercizio è fondamentale comprendere a cosa è asintotico il numeratore. Come procedimento alternativo, è quindi conveniente comprendere come si comporta

$$N(x) = e^{-x} - 1 - \log(1+x)$$

per $x \to 0$. È evidente che $N(0) = 0$ e per comprendere l'ordine di grandezza rispetto ad x basta calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1 - \log(1+x)}{x} = -2 \quad \text{(si applichi de l'Hospital)}.$$

Di conseguenza, $N(x) \simeq -2x$ per $x \to 0$, il resto del ragionamento precedente può essere ripetuto esattamente come prima.

(2b) Si determini il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(1/n\right) \right]$$

Un modo abbastanza semplice per comprendere l'ordine di grandezza (rispetto a $1/n$) del termine generale della serie, consiste nell'effettuare l'espansione della formula di Taylor, ma questo richiederebbe il calcolo della formula di Taylor per la tangente, non è difficile, ma richiede qualche conto. Per evitare ogni conto, riscriviamo il termine generale nel modo seguente:

$$\sin(1/n) - \tan(1/n) = \frac{\sin(1/n)\cdot(\cos(1/n)-1)}{\cos(1/n)} \sim \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{2n^2}\right) = -\frac{1}{2n^3},$$

per $n \to +\infty$

dove abbiamo sfruttato le seguenti relazioni asintotiche corrispondenti a limiti notevoli:

$$\left.\begin{array}{l} \sin x \sim x \\ 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} \text{per } x \to 0.$$

Inoltre, abbiamo anche utilizzato il fatto che $\cos x \to 1$ per $x \to 0$.

Tenendo conto del fatto che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{2n^3} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} \text{ è convergente}$$

(serie armonica generalizzata del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$),

allora la serie di partenza, cioè

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan(1/n)\right]$$

è a sua volta convergente per il criterio del confronto asintotico.

(2c) Si determini il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n \frac{n^8+4n^7}{e^n}\right]$$

Proviamo che la serie è assolutamente convergente per il criterio del rapporto; infatti

$$\frac{(n+1)^8+4(n+1)^7}{e^{(n+1)}}\cdot\frac{e^n}{n^8+4n^7}=\frac{\cancel{n^8}}{\cancel{n^8}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^8+\frac{4}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^7}{1+4/n}\cdot\frac{1}{e}$$

$$\longrightarrow 1\cdot\frac{1}{e}=1/e \quad \text{per } n\to+\infty$$

Siccome il modulo del termine generale $n+1$-esimo diviso " " " " " n-esimo tende a un valore <1, allora la serie converge assolutamente per il criterio del rapporto e quindi è anche semplicemente convergente.

(2c*) Osserviamo che ~~la~~ il termine generale della serie è definitivamente decrescente in modulo. Infatti, si ponga

$$f(x)=(x^8+4x^7)e^{-x}$$

e si studi il segno di

$$f'(x)=(-x^8-4x^7+8x^7+28x^6)e^{-x}=$$

$$=(-x^8+4x^7+28x^6)e^{-x}=(-x^2+4x+28)x^6e^{-x}$$

Abbiamo che, $\forall x > 0$,

$$f'(x) \gtreqless 0 \quad \text{per} \quad -x^2+4x+28 \gtreqless 0$$

Per cercare i p.ti stazionari, dobbiamo risolvere l'equazione

$$-x^2+4x+28=0 \Rightarrow x^2-4x-28=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+28} = 2 \pm \sqrt{32}$$

Essendo il segno del termine quadratico $-x^2+4x+28$ negativo, allora abbiamo che

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } 0 \leq x < 2+\sqrt{32} \simeq 7.7$$

e

$$f'(x) < 0 \quad \text{per } x > 2+\sqrt{32} \simeq 7.7$$

Ricordiamo che siamo interessati solo a valori positivi di x (che verrà sostituito con $n \in \mathbb{N}$), pertanto possiamo affermare che

$$\frac{n^8+4n^7}{e^n} \text{ è decrescente per } n \geq 8.$$

Inoltre, la nostra serie di partenza è a termini di segno alternato e il termine generale converge a zero (si ricordi la discussione del punto (2c)) per $n \to +\infty$.

Possiamo quindi applicare il criterio di Leibniz, o meglio, l'idea fondamentale su cui si basa la dim. del criterio di Leibniz, cioè abbiamo che

$$\left| \sigma - \sum_{n=0}^{N} \left[(-1)^n \frac{n^8+4n^7}{e^n} \right] \right| \leq \frac{(N+1)^8+4(N+1)^7}{e^{N+1}},$$

dove $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n \frac{n^8+4n^7}{e^n}\right]$ e $N \geq 7$.

Di conseguenza, il valore di N (affinché l'approssimazione fornita dai primi N termini sia corretta a meno di un errore inferiore a $1/100$) si determina trovando quell'N t.c. $N \geq 8$ e

$$\frac{N^8+4N^7}{e^N} > 0{,}01 \quad , \text{ma} \quad \frac{(N+1)^8+4(N+1)^7}{e^N} < 0{,}01 .$$

Con un po' di tentativi si trova che il valore di N richiesto è $N = 32$, perché

$$f(32) > \frac{1}{100} \quad , \text{ mentre } \quad f(33) \simeq 0{,}007 < \frac{1}{100}$$

(3a) Si calcoli il valore di

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+1/x)}{x^4\left[\cos(1/x)-1\right]\left(1-e^{-4/x^3}\right)} .$$

In questo caso è conveniente effettuare il cambio di variabile $y = 1/x$; possiamo quindi riscriverlo come segue:

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{y^4 \log(1+y)}{\left[\cos y - 1\right]\left(1-e^{-4y^3}\right)} .$$

Siccome sappiamo che (forma asintotica dei limiti notevoli):

$$\log(1+y) \sim y\ ,\quad 1-\cos y \sim \frac{y^2}{2}\ ,\quad e^{-4y^3}-1 \sim -4y^3$$

per $y \to 0$ allora possiamo riformulare il limite di partenza in modo più semplice, come segue:

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^4 \log(1+y)}{[\cos y - 1](1-e^{-4y^3})} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^4 \cdot y}{-\frac{y^2}{2}\cdot(+4y^3)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^5}{-2y^5} = \frac{-1}{2}$$

(3b) Si calcoli il valore di

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} \log x .$$

È conveniente riscrivere il limite precedente nella forma $\lim_{x\to 1^+} \frac{\log x}{e^{-1/(x-1)}}$.

Osserviamo che è una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$ e si potrebbe risolvere applicando il teorema di de l'Hopital, con qualche conto. Cerco di semplificare ulteriormente ~~i~~ i calcoli osservando che $\log x = \log[1+(x-1)] \sim x-1$ per $x\to 1$; di conseguenza,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log x}{e^{-1/(x-1)}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{e^{-1/(x-1)}} =, \text{ ponendo } y=\frac{1}{x-1},$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1/y}{e^{-y}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty \quad \text{(per la gerarchia degli infiniti)}$$

(3c) Si calcoli il valore di

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}\right)^{1/x^2}.$$

E' conveniente porre questo tipo di limiti nella forma

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}\right)}.$$

per poi studiare separatamente l'esponente.

Abbiamo quindi che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\log(1+x^2)-\log(1-x^2)}{x^2},$$

potremmo qui utilizzare le formule di Taylor, ma è probabilmente più elegante il cambio di variabile $y=x^2$ quindi il limite ~~di partenza~~ dell'esponente è

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}\log(1+y)-\log(1-y)}{y},$$ applico il th. di de l'Hospital, $$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1}=\frac{3}{2}.$$

Di conseguenza, il limite di partenza è tale che

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}\right)^{1/x^2}=e^{3/2}$$