Calcolo 1 x Sc. dei Materiali
& Analisi 1 x Chimica Applicata

II esonero, Gennaio 2018

(1A) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_a(x) = x e^{\frac{1}{x-a}}$$

dove il parametro $a \in \mathbb{R}$ è t.c. $a > 1$.
Si determini l'unico valore $\bar{a}$ t.c. $f_{\bar{a}}(x)$ ha un p.to stazionario in corrispondenza all'ascissa ~~unico valore~~ t.c. il suo valore è doppio rispetto a quello dell'unico p.to di singolarità della funzione

Evidentemente, il dominio D_a della funzione $f: D_a \mapsto \mathbb{R}$ è

$$D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}.$$

Di conseguenza, $x=a$ è l'unico p.to di singolarità per la funzione f_a.
Per determinare il punto stazionario, calcoliamo:

$$f_a'(x)=\left[1-\frac{\cancel{x}\,1}{(x-a)^2}\right]e^{\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\left[\frac{x^2-(2a+1)x+a^2}{(x-a)^2}\right]e^{\frac{1}{x-a}}.$$

Siccome deve essere $f_a'(x)=0$, imponiamo che $x^2-(2a+1)x+a^2=0$;
inoltre, stiamo cercando quel valore di a per cui $f_a'(2a)=0$, quindi ne segue che

$$(2a)^2-(2a+1)2a+a^2=0$$

$$\Rightarrow \cancel{4a^2}-\cancel{4a^2}-2a+a^2=0$$

$$\Rightarrow a^2-2a=0 \Rightarrow a\cdot(a-2)=0$$

Ne segue che $\underline{\bar{a}=2}$ ($a=0$ non è accettabile perché il testo impone che $a>1$).

(1B) Si studi il grafico della funzione $f_{\bar{a}}(x)$.

PAG. 3

Grazie al fatto che abbiamo già risolto il punto (1A), sappiamo che dobbiamo studiare

$$f_2(x) = x\, e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Il dominio è $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

f_2 non è simmetrica, né periodica.

Studiamo i limiti alla frontiera:

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \to +\infty} x e^{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \to -\infty} x e^{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} x e^{\frac{1}{x-2}} = 2 \cdot e^{-\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 2^+} x e^{\frac{1}{x-2}} = 2 \cdot e^{+\infty} = +\infty.$$

In corrispondenza all'avvicinamento da destra

c'è quindi un asintoto verticale.
I limiti a $\pm\infty$ lasciano intuire che ci sono degli asintoti obliqui.
Infatti,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = 1$$

e $$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x-2}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-2} = 1^+$$

Inoltre, $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_2(x)}{x} = 1$$

e $$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) - x = \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x-2}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-2} = 1^-.$$

Concludendo, $f_2(x)$ tende all'asintoto $y = x+1$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$, ma in un caso da sopra e nell'altro da sotto, rispettivamente.

Passiamo allo studio della derivata.

$$f_2'(x) = \left[1 - \frac{x}{(x-2)^2}\right] e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$f_2'(x) \gtreqless 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 - x = x^2 - 5x + 4 \gtreqless 0$$

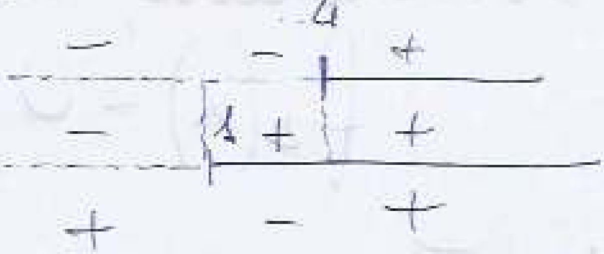
I p.ti stazionari si hanno in corrispondenza a

$x = 4$ e $x = 1$.

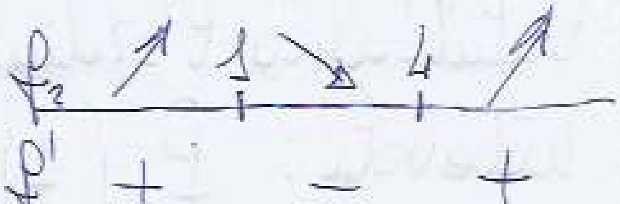
Per studiare il segno di $f_2'(x)$, siamo quindi ricondotti alla disequazione

$(x-4)\cdot(x-1) > 0$

$\Longleftrightarrow x < 1,\ x > 4.$



Riassumendo abbiamo che



la funzione f_2 è crescente se $x < 1$ o $x > 4$, mentre decresce quando $x \in (1,4)$, a parte nel p.to di singolarità $x = 2$.

Passiamo allo studio della derivata seconda:

$$f_2''(x) = \left[-\frac{(x-2)^{\cancel{2}} - 2x\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{4}}} - \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^4}\right] e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\Rightarrow f_2''(x) = \frac{\cancel{-x^2} + \cancel{4x} - 4 + \cancel{2x^2} - \cancel{4x} \cancel{-x^2} + 5x - 4}{(x-2)^4}\, e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$= \frac{5x-8}{(x-2)^4}\, e^{\frac{1}{x-2}}$$

PAG 6

Ne segue che f_2 ha la concavità verso l'alto [il basso] quando $x > \frac{8}{5}$ $\left[x < \frac{8}{5}\right]$.

Ovviamente, l'equazione

$$f_2(x) = 0 \text{ ammette come unica soluzione } x = 0.$$

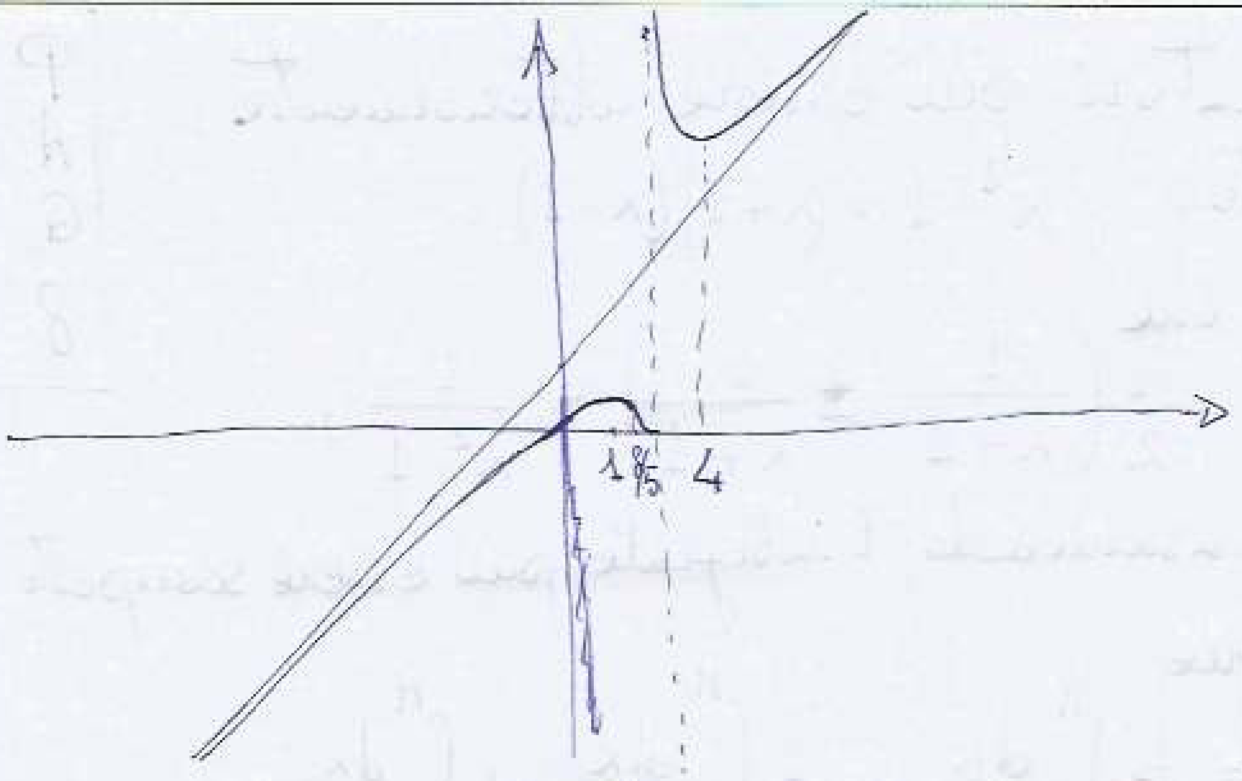
Valutiamo l'ordinata di alcuni altri p.ti notevoli:

$$f_2(1) = 1 \cdot e^{\frac{1}{-1}} = \frac{1}{e} \simeq 0.37$$

$$f_2(4) = 4e^{\frac{1}{2}} \simeq 6.6$$

$$f_2(8/5) = \frac{8}{5}\, e^{\frac{1}{-2/5}} = \frac{8}{5} e^{-\frac{5}{2}} \simeq 0.13$$

Tutte le informazioni che abbiamo dedotto sono riassunte nel grafico alla pagina seguente.



—o—

(2A) $\forall\, M>2$, si calcoli il seguente integrale definito:

$$F(M) = \int_2^M dx\, \frac{2x^2}{x^4-1}.$$

—o—

Il modo più semplice per scomporre la funzione integranda, consiste nell'attuare una strategia "in due passi". Dapprima si osserva che il denominatore si può scomporre come segue:

$$x^4-1 = (x^2-1)\cdot(x^2+1)$$

e, quindi, $\dfrac{2x^2}{x^4-1} = \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{1}{x^2+1}$.

Successivamente, si osserva che il primo dei 2 denominatori può essere ulteriormente scomposto: $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

Ne segue che

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x^2-1},$$

quindi, riassumendo, l'integrale può essere scomposto come segue:

$$F(M)=\frac{1}{2}\int_2^M\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int_2^M\frac{dx}{x+1}+\int_2^M\frac{dx}{1+x^2}.$$

Alla stessa conclusione, si arriva (con più calcoli) anche imponendo che sia valida la decomposizione

$$F(M)=\int_2^M\frac{a\,dx}{x+1}+\int_2^M\frac{b\,dx}{x-1}+\int_2^M\frac{cx+d}{x^2+1}\,dx;$$

ciò implica che sia verificato il sistema lineare (in 4 eq. e nelle 4 incognite a, b, c e d) che si ottiene uguagliando i coefficienti dei 2 polinomi a destra e a sinistra dell'equazione

$$a(x-1)(x^2+1)+b(x+1)(x^2+1)+(cx+d)(x^2-1)=2x^2.$$

Torniamo al calcolo di $F(M)$, a partire dalla sua decomposizione in tre integrali:

$$F(M)=\frac{1}{2}\log(x-1)\Big|_2^M-\frac{1}{2}\log(x+1)\Big|_2^M+\arctan x\Big|_2^M$$

$$\Longrightarrow F(M) = \frac{1}{2}\log(M-1) - \frac{1}{2}\log(M+1) + \frac{1}{2}\log 3 + \arctan M - \arctan 2$$

(2B) Si discuta la convergenza dell'integrale descritto al punto precedente sull'intervallo illimitato $[2,+\infty)$, calcolando

$$\lim_{M\to+\infty} F(M)$$

oppure applicando i criteri di integrabilità (o di non integrabilità) su intervalli illimitati

---

$$\lim_{M\to+\infty} F(M) = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{M-1}{M+1}\right) + \frac{1}{2}\log 3 + \arctan(M) - \arctan 2\right]$$

$$= \left[\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{2}{M+1}\right)\right] + \frac{1}{2}\log 3 + \frac{\pi}{2} - \arctan 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 + \frac{\pi}{2} - \arctan 2 .$$

Possiamo quindi concludere che l'integrale proposto nell'esercizio (2A) converge su tutto l'intervallo $[2,+\infty)$.

(3) Si discuta la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{x}}\, dx$$

Innanzitutto, si osservi che non possiamo applicare immediatamente i soliti teoremi riguardo all'integrabilità su intervalli illimitati poiché l'integranda non è definitivamente positiva né definitivamente negativa.

Procediamo per parti, ponendo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad e \quad g'(x) = \sin x \cos x \Rightarrow g(x) = +\frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{x}}\, dx = + \frac{\sin^2 x}{2\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} dx\, \frac{\sin^2 x}{x^{3/2}}$$

Di questi 2 addendi il primo è convergente, perché comprende il limite di una funzione oscillante moltiplicata per un infinitesimo: $\frac{\sin^2 x}{2\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin^2 x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 1}{2} = 0 - \frac{\sin^2 1}{2}$.

Anche il secondo addendo è convergente per il Teorema del confronto applicato a integrali su intervalli illimitati, poiché $\frac{\sin^2 x}{x^{3/2}} \le \frac{1}{x^{3/2}}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ è convergente.

Possiamo quindi concludere che l'integrale di partenza è convergente.