

II Esame di gennaio 2016

(1a) Si consideri la famiglia di funzioni a un parametro

$$f_a(x) = -\frac{1}{x} + \frac{a}{x^3} - \frac{3}{2x^4};$$

si determini il valore del parametro a in modo tale che f_a abbia un punto stazionario in $x = -3$.

Basta imporre che

$$f'_a(-3) = 0.$$

Per risolvere quest'ultima equazione (nel parametro a , che funge da incognita), occorre prima calcolare:

$$f'_a(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3a}{x^4} + \frac{6}{x^5} = \frac{x^3 - 3ax + 6}{x^5}.$$

Imponiamo ora che $f'_a(-3) = 0$ e otteniamo:

$$\frac{-27 + 9a + 6}{-243} = 0 \Rightarrow 9a = 21 \Rightarrow \boxed{a = \frac{7}{3}}$$

(1b) Si studi il grafico della funzione $f_a(x)$ quando a è fissato così come richiesto al punto (1a). Nello studio del grafico non è richiesto di

trattare la concavità/convessità.

pag. 2

Il dominio di $f_{7/3}(x)$ è evidentemente
 $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Non esistono periodicità, né relazioni di parità evidenti.
Per determinare gli zeri, occorrerebbe risolvere
l'eq. cubica

$$-x^3 + \frac{7}{3}x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 6x^3 - 14x + 9 = 0.$$

Di quest'ultima eq. è difficile individuare una
radice (per poi trovare le altre 2 grazie al metodo di
Ruffini), quindi rinunciamo alla determinazione
degli zeri.

Disutiamo ora gli asintoti.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{7/3}(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{7/3}(x) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_{7/3}(x) = -\infty.$$

Passiamo ora alla ricerca di massimi e minimi.

Come scritto in precedenza $f'_a(x) = \frac{x^3 - 3ax + 6}{x^5}$

$$\Rightarrow f'_{7/3}(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^5}$$

Sappiamo che $x = -3$ è una soluzione dell'equazione

$$f'_{7/3}(x) = 0 ;$$

pag. 3

questa osservazione ci serve per poter scomporre il numeratore; infatti, deve essere

$$x^3 - 7x + 6 = (x+3)(x^2 + \alpha x + \beta),$$

altrimenti $x = -3$ non sarebbe una soluzione.

Dall'equazione precedente si ricava

$$3\beta = 6 \Rightarrow \beta = 2,$$

$$\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = -3,$$

quindi
$$x^3 - 7x + 6 = (x+3) \cdot (x^2 - 3x + 2),$$

come si può facilmente verificare.

A questo punto siamo in grado di determinare tutti i p.ti stazionari, cioè tutte le soluzioni dell'eq.

$$f'_{7/3}(x) = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

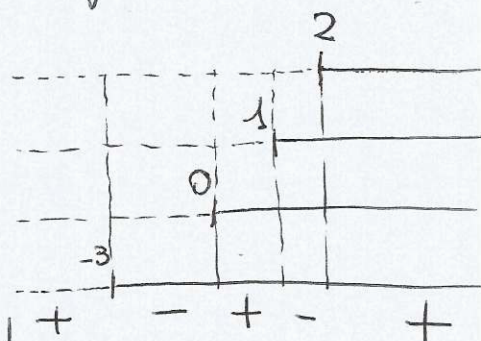
$$\Rightarrow x = 2.$$

Per discutere il segno della derivata prima è conveniente scriverla nella forma seguente:

$$f'_{7/3}(x) = \frac{(x+3) \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{x^5}$$

Per comprendere quando $f'_{7/3}(x) \geq 0$, è conveniente riferirsi allo schema grafico qui accanto. Abbiamo quindi

che $f_{7/3}(x)$ è crescente per $x < -3$, $x \in (0, 1)$ e $x > 2$,



mentre $f_{7/3}(x)$ è decrecente per $x \in (-3, 0)$ pag. 4
e per $x \in (1, 2)$ -

Per poter ~~disegnare~~ tracciare il grafico, è conveniente valutare anche le ordinate dei p.ti di massimo e di minimo.

P.ti di massimo:

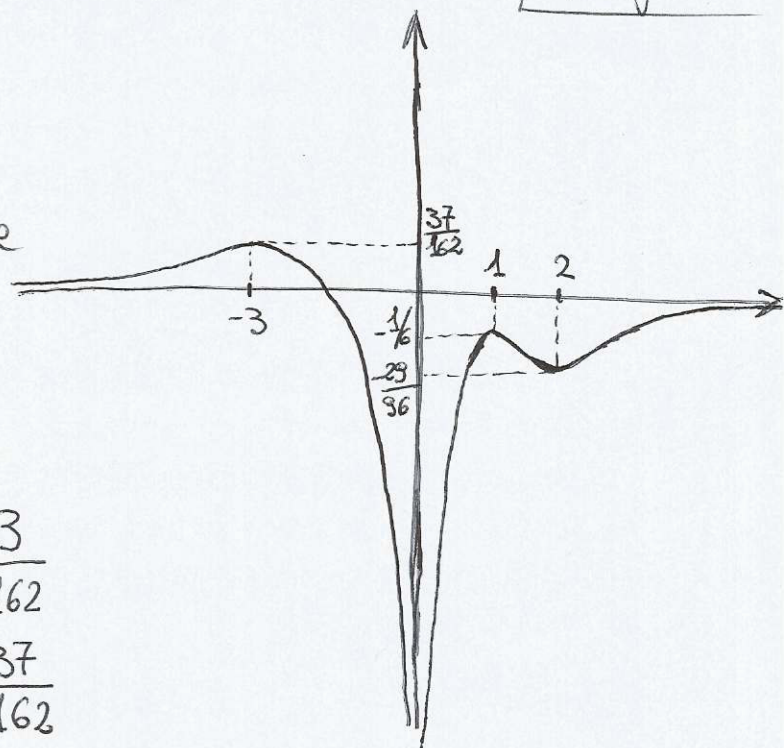
$$x = -3, \quad y = f_{7/3}(-3) = \frac{1}{3} - \frac{7}{81} - \frac{3}{162} \\ = \frac{54 - 14 - 3}{162} = \frac{37}{162}$$

$$x = 1, \quad y = f_{7/3}(1) = -\frac{1}{1} + \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{-6 + 14 - 9}{6} = -\frac{1}{6}$$

P.to di minimo

$$x = 2, \quad y = f_{7/3}(2) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{24} - \frac{3}{32} = \frac{-18 + 28 - 9}{96} = -\frac{23}{96}$$

Siccome non sono richieste informazioni riguardanti la concavità/convessità, siamo più in grado di sintetizzare tutte le informazioni (che abbiamo sin qui ottenuto) in un grafico, che è riportato in alto a destra in questa stessa pagina.



(2a) Si riconsideri la famiglia di funzioni a un parametro (che è già stata introdotta al punto (1a)):

$$f_a(x) = -\frac{1}{x} + \frac{a}{x^3} - \frac{3}{2x^4};$$

Si determini ora il valore del parametro a in modo che l'equazione $f'_a(x) = 0$ abbia una radice di molteplicità doppia in un p.to

Stazionario $x=b$.

pag. 5

Riscriviamo l'espressione della derivata prima

$$f'_a(x) = \frac{x^3 - 3ax + 6}{x^5}$$

Affinché $x=b$ sia una soluzione doppia dell'eq. $f'_a(x)=0$, deve essere vera anche la seguente decomposizione:

$$\begin{aligned} x^3 - 3ax + 6 &= (x-b)^2 \cdot (x-c) \\ &= (x^2 - 2bx + b^2)(x-c) = x^3 - (2b+c)x^2 + (b^2+2bc)x - b^2c \end{aligned}$$

Ne segue il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2b+c=0 \\ b^2+2bc=-3a \\ -b^2c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} c &= -2b \\ b^2c &= -6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2b^3 &= +6 \\ b^3 &= +3 \end{aligned}$$

$$\boxed{b = \sqrt[3]{+3}}$$

Siccome $b = \sqrt[3]{3}$ e $c = -2b$

$$\Rightarrow \boxed{c = -2\sqrt[3]{3}}$$

Infine, dall'equazione $a = -\frac{1}{3}(b^2+2bc)$ si ricava

$$a = -\frac{1}{3}(\sqrt[3]{9} - 4\sqrt[3]{9}) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9}$$

Pertanto, il valore richiesto è

$$\boxed{a = \sqrt[3]{9}}$$

(2b) Senza effettuare il calcolo della derivata seconda, si verifichi che il punto $x=b$ è un punto di flesso a tangente orizzontale per la funzione $f_a(x)$ quando a è determinato così come richiesto al punto (2a). pag. 6

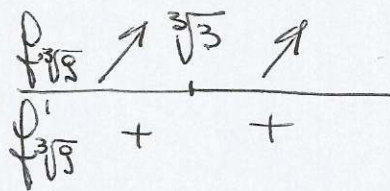
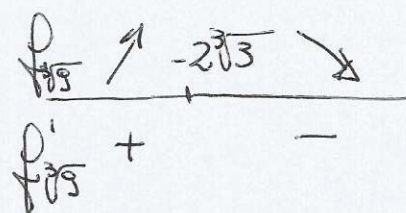
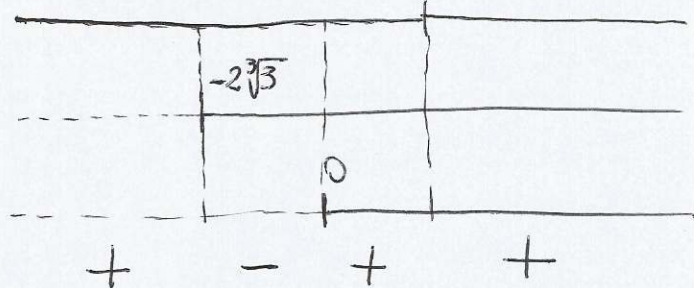
Durante la soluzione dell'esercizio (2a), abbiamo ottenuto che

$$f'_{\sqrt[3]{3}}(x) = \frac{(x - \sqrt[3]{3})^2 \cdot (x + 2\sqrt[3]{3})}{x^5}$$

Per comprendere dove $f'_{\sqrt[3]{3}}(x)$ cresce e dove decresce è conveniente riferirsi allo schema grafico qui accanto.

Per quanto riguarda i due punti stazionari, possiamo dedurre che $x = -2\sqrt[3]{3}$ è un p.to di massimo, mentre

$x = \sqrt[3]{3}$ mostra la tipica situazione di un p.to di flesso a tangente orizzontale, questo conclude l'esercizio.



NOTA: qui sopra si fa riferimento alla definizione di p.to di flesso a tangente orizzontale che è riportata sul libro di testo seguito durante il corso.

Comunque, è facile verificare che in questa situazione $x = \sqrt[3]{3}$ è un p.to in cui cambia la concavità. Infatti, a sinistra di $x = \sqrt[3]{3}$ la derivata prima è positiva e in $x = \sqrt[3]{3}$ essa è nulla, ne segue che $f''_{\sqrt[3]{3}}(x)$ è decrescente ~~per~~ quando x è a sinistra di $\sqrt[3]{3}$ e nelle sue vicinanze $\Rightarrow f''_{\sqrt[3]{3}}(x) < 0$ per $x \in (r, \sqrt[3]{3})$ dove $r < \sqrt[3]{3}$ è un valore opportuno che qui non occorre determinare. Inoltre, a destra di $x = \sqrt[3]{3}$ la derivata prima è positiva e in $x = \sqrt[3]{3}$ è nulla, ripetendo il ragionamento appena fatto in precedenza, si ottiene che $f''_{\sqrt[3]{3}}(x) > 0$ per $x \in (\sqrt[3]{3}, \delta)$ con $\delta > \sqrt[3]{3}$, dove δ è un valore opportuno, che qui non occorre determinare. Siccome la derivata seconda cambia segno in corrispondenza a $\sqrt[3]{3}$, quindi c'è il passaggio da concavità a convessità e, allora, $x = \sqrt[3]{3}$ è un p.to di flesso. Siccome sappiamo già che $f'_{\sqrt[3]{3}}(\sqrt[3]{3}) = 0$, allora $x = \sqrt[3]{3}$ è un p.to di flesso a tangente orizzontale.

(3) Si determini il valore del seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

È conveniente utilizzare la seconda espressione | pag. 8
 ne dell'integrale, per poi effettuare la sostituzione
 $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$, quindi abbiamo che

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{2t dt}{t \sqrt{1-t^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \text{ dove gli estremi di}$$

integrazione hanno gli stessi valori perché $\sqrt{x} \Big|_{x=0} = 0$ e $\sqrt{x} \Big|_{x=1} = 1$.

A questo punto, è facile terminare il calcolo; infatti,

$$2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \arcsin t \Big|_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi$$

4) Discutere se il cosiddetto integrale di Fresnel, cioè
 $\int_0^{+\infty} dx \sin x^2$, è convergente oppure no. A questo
 scopo, è opportuno discutere l'esistenza del limite

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}$$

utilizzando anche i criteri di integrabilità.

Procediamo per parti e otteniamo che

$$\int_1^M \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} = -\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \Big|_1^M - \int_0^M \frac{\cos t}{4t^{3/2}}$$

Osserviamo che $\lim_{M \rightarrow +\infty} -\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \Big|_1^M = \frac{\cos(1)}{2}$.

Si tratta quindi di discutere l'esistenza del limite $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\cos t}{4t^{3/2}}$

Per determinare se $\frac{\cos t}{\sqrt[4]{t^{3/2}}}$ è integrabile pag. 9
 su $[1, +\infty)$ oppure no, è opportuno studiare
 l'assoluta integrabilità, ovvero ci chiediamo se
 esiste $\int_1^{+\infty} dt \left| \frac{\cos t}{\sqrt[4]{t^{3/2}}} \right| = \int_1^{+\infty} dt \frac{|\cos t|}{\sqrt[4]{t^{3/2}}}$.

A questo punto, osserviamo che l'ultimo integrale
 che abbiamo scritto, cioè $\int_1^{+\infty} dt \frac{|\cos t|}{\sqrt[4]{t^{3/2}}}$ è sicuramente
 convergente, perché $\frac{\cos t}{\sqrt[4]{t^{3/2}}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{t^{3/2}}}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[4]{t^{3/2}}} = -\frac{3}{8} \frac{1}{t^{5/2}} \Big|_1^{+\infty} = \frac{3}{8}$.

Possiamo quindi concludere che
 $\int_1^{+\infty} dt \frac{|\cos t|}{\sqrt[4]{t^{3/2}}}$ è convergente per il criterio del
 confronto ~~assoluto~~ per integrali
 su intervalli illimitati;

ne segue che $\int_1^{+\infty} dt \frac{\cos t}{\sqrt[4]{t^{3/2}}}$ è integrabile perché è addit-
 tura assolutamente integrabile.

Infine, $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M dt \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}$ esiste perché è stato espresso
 nella forma

$\lim_{M \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \Big|_1^M - \int_0^M dt \frac{\cos t}{\sqrt[4]{t^{3/2}}} \right)$ che si può
 scindere in una somma di limiti che esistono entrambi.