

II Esame di Calcolo I

gennaio 2015

1a) Si consideri la ~~famiglia~~ famiglia di funzioni

$$g_\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$g_\alpha(x) = (x^\alpha - 2x^{\alpha-2})e^{-x^2/2},$$

dove il parametro $\alpha > 2$.

Si determini il valore α tale che la funzione g_α ha un p.to di minimo in $x=1$.

In questo genere di problemi è utile considerare i valori della funzione, agli estremi dell'intervallo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^{\alpha-2}(-2+x^2)e^{-x^2/2}] = 0^- \quad \text{(dove abbia usato il fatto che } \alpha > 2 \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{x^{\alpha-2} e^{-x^2/2}}_{\rightarrow 0^+} \right] = 0^+ \quad \text{(per la gerarchia degli infiniti).}$$

Per determinare i punti stazionari, cerchiamo le soluzioni dell'eq. $g'_\alpha = 0$.

A questo scopo, calcoliamo

$$\begin{aligned} g'_\alpha &= \left(\alpha \cdot x^{\alpha-1} - 2(\alpha-2)x^{\alpha-3} - x^{\alpha+1} + 2x^{\alpha-1} \right) e^{-x^{\frac{\alpha}{2}}} \\ &= \left(-x^{\alpha+1} + (\alpha+2)x^{\alpha-1} - 2(\alpha-2)x^{\alpha-3} \right) e^{-x^{\frac{\alpha}{2}}} \\ &= - \left[x^4 - (\alpha+2)x^2 + 2(\alpha-2) \right] x^{\alpha-3} e^{-x^{\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

Siccome $e^{-x^{\frac{\alpha}{2}}}$ è sempre positivo e $x^{\alpha-3} > 0$ per $x \in \mathbb{R}_+$, allora

$$g'_\alpha \geq 0 \quad \text{a seconda che} \quad - \left[x^4 - (\alpha+2)x^2 + 2(\alpha-2) \right] \geq 0.$$

Per determinare i punti stazionari, cerchiamo allora le soluzioni dell'equazione

$$x^4 - (\alpha+2)x^2 + 2(\alpha-2) = 0.$$

È un'equazione biquadratica, che si risolve facilmente ponendo $t = x^2$

$$\rightarrow t^2 - (\alpha+2)t + 2(\alpha-2) = 0$$

$$\rightarrow t_{1,2} = \frac{\alpha+2 \pm \sqrt{(\alpha+2)^2 - 8(\alpha-2)}}{2}$$

Si potrebbe mostrare facilmente che queste 2 soluzioni sono entrambe reali positive, quando $\alpha \geq 2$; mettiamo questa verifica.

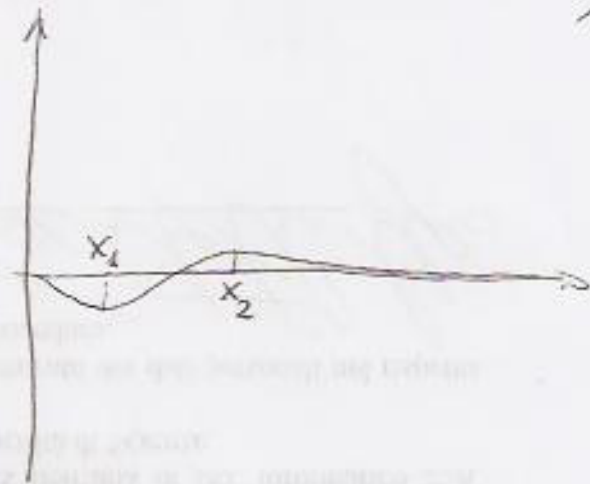
Di conseguenza, i punti stazionari della g_α sono

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha+2 \pm \sqrt{(\alpha+2)^2 - 8(\alpha-2)}}{2}}$$

dove abbiamo messo i 'punti stazionari' negativi perché il dominio è $\mathbb{R}_+$.

Siccome $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_\alpha(x) = 0^-$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_\alpha(x) = +\infty$, allora

e i p.ti di minimo o di massimo ~~solo~~ al ^{più} ~~meno~~ due,
allora il grafico sarà del tipo
qui a fianco, quindi il punto
di minimo sarà corrispondente
al valore α sopra - cioè
dobbiamo risolvere l'equazione



$$x_1 = 1 \Rightarrow \frac{\alpha + 2 - \sqrt{(\alpha + 2)^2 - 8(\alpha - 2)}}{2} = 1, \quad (\text{elevando al quadrato entrambi i membri})$$

$$\Rightarrow \alpha + 2 - \sqrt{(\alpha + 2)^2 - 8(\alpha - 2)} = 2$$

$$\Rightarrow \alpha + 2 - 2 = \sqrt{(\alpha + 2)^2 - 8(\alpha - 2)}, \quad (\text{elevando al quadrato per la seconda volta entrambi i membri dell'eq.})$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 - 8\alpha + 16$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 20 \Rightarrow \alpha = 5.$$

1b) Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = (x^5 - 2x^3) e^{-x^2/2}$$

su tutto il ^{sup} dominio di definizione.

Si osservi che $f(x) = g_5(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$, possiamo quindi riutilizzare parte dello studio che abbiamo effettuato al punto (1a) ~~nel caso con~~ nel caso con $\alpha = 5$.

È evidente che il dominio D di f è tutto l'insieme dei reali $\mathbb{R}$.

Per quanto già visto al punto (1a):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+;$$

inoltre,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(x^5 - 2x^3)}_{< 0} \underbrace{e^{-x^2/2}}_{> 0} = 0^- \quad (\text{per la proprietà degli infiniti}).$$

L'asse delle ascisse è quindi l'asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$!

Osserviamo che la funzione è evidentemente dispari, cioè $f(-x) = (-x^5 + 2x^3)e^{-x^2/2} = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ciò consentirà di studiare certe caratteristiche solo per $x \geq 0$ e di estenderle a tutto $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^4 - 6x^2 - 2x^6 + 2x^4) e^{-x^2/2} = \\ &= -x^2(x^4 - 7x^2 + 6) e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

Per determinare i p.t. stazionari, procediamo come nel primo esercizio:

$$f'(x) = 0 \iff -x^2(x^4 - 7x^2 + 6) = 0$$

Quest'ultima eq. è evidentemente risolta da $x = 0$; per trovare le altre radici si pone $t = x^2$, quindi

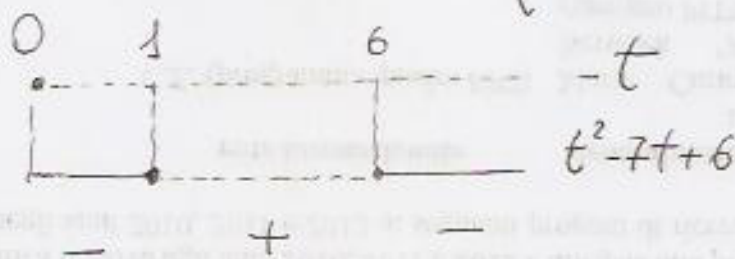
abbiamo da risolvere

$$t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \begin{matrix} 1 \\ 6 \end{matrix}$$

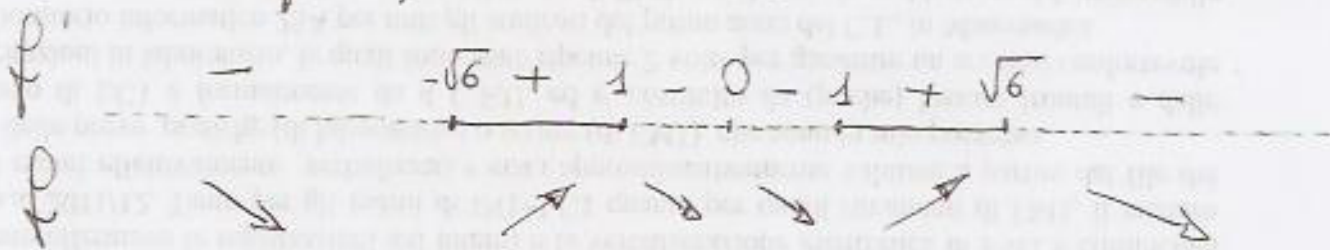
Allora, i punti stazionari sono $x = 0, \pm 1, \pm \sqrt{6}$.

Studiamo il segno della derivata, è comodo farlo per $x \geq 0$, ponendo $t = x^2$, abbiamo quindi che

$$f'(x) > 0 \text{ per } x \geq 0 \Leftrightarrow -t(t^2 - 7t + 6) \geq 0$$



Tenendo conto che $f'(-x) = f'(x)$ (cioè la derivata è una funzione pari) avremo che



Riassumendo,

la funzione f è crescente per $x \in (-\sqrt{6}, -1)$ e $x \in (1, \sqrt{6})$

" " " " decrescente " $x \in (-\infty, -\sqrt{6})$, $x \in (-1, 0)$,
 $x \in (0, 1)$ e $x \in (\sqrt{6}, \infty)$;

infine, f ha un flesso con tangente orizzontale nell'origine.

In questo caso, lo studio della derivata seconda è un po'

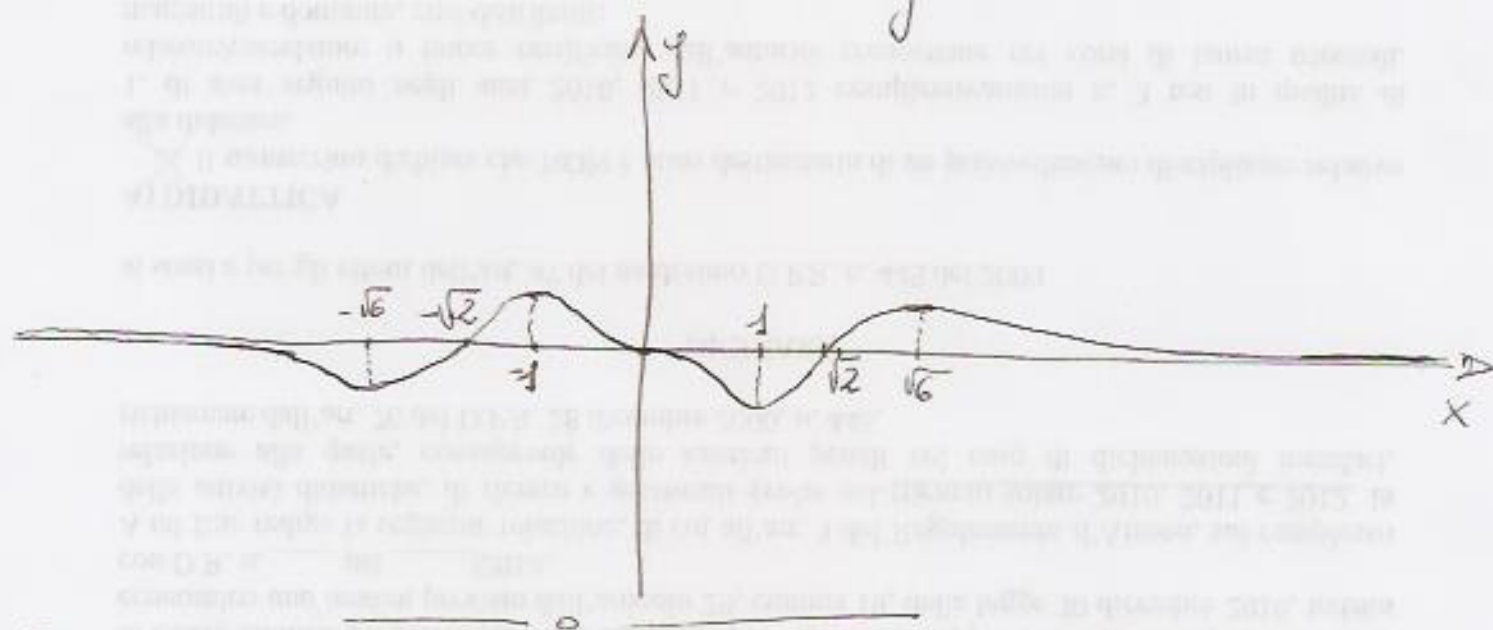
complicato e non aggiunge molte informazioni.
E' invece assai semplice il calcolo degli zeri della funzione.

$$\text{Infatti, } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^5 - 2x^3 = 0$$

$x^5 - 2x^3 = 0$ implica che

$$x^3 \cdot (x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}.$$

Riassumendo tutte le informazioni, il grafico può essere tracciato come segue



(2a) Si determini la primitiva:

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2/2} dx$$

Questo integrale potrebbe essere risolto, utilizzando due volte il metodo per parti (occorre osservare che $f'(x) = x \cdot e^{-x^2/2}$ ha come primitiva $f(x) = e^{-x^2/2}$).
Procediamo, invece, applicando prima il metodo di sostituzione:

poniamo $t = x^2/2 \Rightarrow dt = x dx$, $x = \sqrt{2t}$,

quindi $\int x^3 e^{-x^2/2} dx = \int 2t e^{-t} dt =$, procediamo per
parti ponendo $f(t) = 2t$
e $f'(t) = e^{-t} \Rightarrow g(t) = -e^{-t}$,

$$= -2t \cdot e^{-t} + \int 2e^{-t} dt =$$

$$= -2t \cdot e^{-t} - 2e^{-t} =, \text{risostituendo } t = x^2/2,$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x^2/2} - 2e^{-x^2/2}.$$

(2b) Si determini la funzione ~~$F(x)$~~ $F: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$
t.c. $F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{2}}{1-4u^2} du$ con $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

È conveniente esprimere l'integranda come una
somma di funzioni razionali che hanno un denomi-
natore di grado 1 rispetto a u , quindi

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{2}}{1-4u^2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^x \frac{du}{1-2u} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^x \frac{du}{1+2u} =$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} \log|1-2u| \Big|_0^x + \frac{\sqrt{2}}{4} \log|1+2u| \Big|_0^x$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} \log(1-2x) + \frac{\sqrt{2}}{4} \log(1+2x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \log\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right),$$

dove (togliendo il segno di valore assoluto) abbiamo tenuto conto che $0 \leq x < 1/2$.