

Calcolo 1 & Analisi Matematica 1

pag. 1

II esonero, Dicembre 2018

(1) Si risolva in $\mathbb{C}$ l'eq. seguente:

$$(z^2 + 1)^4 = (6z^2 - 1) \cdot (z^2 + 1) + 6$$

nel membro di sinistra, per effettuare il calcolo della potenza quarta, ricordiamo che i coefficienti binomiali sono:

$$\binom{4}{0} = 1, \binom{4}{1} = 4, \binom{4}{2} = 6, \binom{4}{3} = 4, \binom{4}{4} = 1,$$

che possono essere facilmente calcolati usando la definizione con l'albero di Tartaglia oppure la definizione con i coefficienti fattoriali.

Di conseguenza, l'equazione può essere risolta così come segue

$$z^8 + 4z^6 + 6z^4 + 4z^2 + 1 = 6z^4 + 6z^2 - z^2 - 1 + 6$$

$$\Rightarrow z^8 + 4z^6 - z^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow z^6 \cdot (z^2 + 4) - 1 \cdot (z^2 + 4) = (z^6 - 1) \cdot (z^2 + 4) = 0$$

Le soluzioni risolvono separatamente le equazioni: $z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 2i,$

$$z^6 = 1 \Rightarrow z_{j+2} = e^{i(\frac{2\pi}{6} \cdot j)} \quad \forall j=1, \dots, 6 \quad \text{pag. 2}$$

Cioè in modo più esteso

$$z_3 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_5 = e^{i\pi} = -1, \quad z_6 = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_7 = e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_8 = e^{i2\pi} = 1.$$

$$(2A) \text{ Sia } g_a(x) = \frac{a}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{(x^2+1)^2}{4} - 20,$$

Si determini il solo valore di $\bar{a}$ t.c.

$$g''_{\bar{a}}(0) = -31.$$

Procediamo a calcolare le derivate:

$$g'_a(x) = -\frac{1}{2} \frac{a}{(1+x^2)^{3/2}} \cdot 2x + \frac{2(x^2+1)}{4} \cdot 2x$$

$$= -\frac{ax}{(1+x^2)^{3/2}} + x \cdot (x^2+1).$$

$$g''_a(x) = -\frac{a}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{2ax}{(1+x^2)^{5/2}} + 3x^2 + 1$$

$$\Rightarrow g''_{\bar{a}}(0) = -a + 0 + 0 + 1.$$

L'equazione che consente di determi-
nare $\bar{a}$, diventa semplicemente

pag. 3

$$g''_{\bar{a}}(0) = -\bar{a} + 1 \rightarrow -\bar{a} + 1 = -31 \\ \rightarrow \bar{a} = 32.$$

(2B) Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = g_{\bar{a}}(x),$$

omettendo la discussione su concavità/con-
vessità.

Per quanto discusso al punto (2A), abbiamo
che $f(x) = \frac{32}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{(x^2+1)^2}{4} - 20$.

Il dominio D di $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è evidentemente
tutto $\mathbb{R}$. Siccome $f(-x) = f(x)$, la funzione
è pari. Siccome $f(x) \sim \frac{x^4}{4}$ per $x \rightarrow \pm\infty$,
la funzione non ammette asintoti e i limiti
alla frontiera di D sono
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Possiamo studiare dove $f(x)$ è
crescente/decrecente. Utilizzando
il calcolo della derivata effettuato al punto
(2A) abbiamo che

$$f'(x) = -\frac{32x}{(1+x^2)^{3/2}} + x(x^2+1) =$$

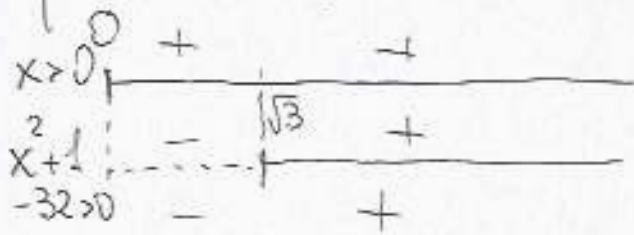
$$= x \cdot \frac{(x^2+1)^{5/2} - 32}{(x^2+1)^{3/2}}$$

I p.ti stazionari sono dati da

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot [(x^2+1)^{5/2} - 32] = 0$$

Per quanto riguarda
lo studio del segno di
 $f'(x)$, basta occuparsene
per valori positivi di x ,
perché la situazione per $x \in \mathbb{R}^-$

può essere ricostruita sfruttando la parità di f .

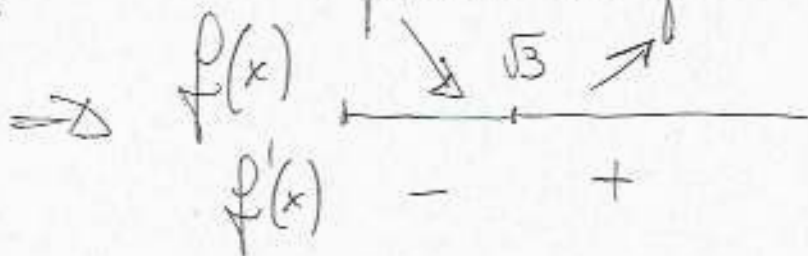


$$x=0$$

$$(x^2+1)^{5/2} = 32$$

$$x^2+1 = (32)^{2/5} = 4$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$



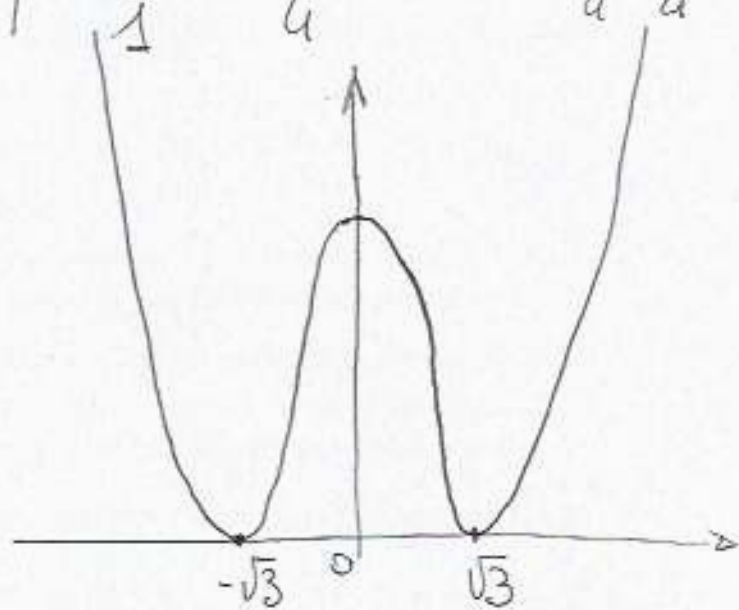
Avremo quindi due p.ti di minimo
in $x = \pm \sqrt{3}$ la cui corrispondente ordina-

Pop. 5

$$\text{ta è } f(\pm\sqrt{3}) = \frac{32}{\sqrt{1+3}} + \frac{(3+1)^2}{4} - 20 = 16 + 4 - 20 = 0,$$

mentre avremo un p.to di max. in $x=0$, la cui corri-
spondente ordinata è $f(0) = \frac{32}{1} + \frac{1}{4} - 20 = 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4}$.

Possiamo riassumere
tutte le informazioni
(che abbiamo dedotto
precedentemente) nel
grafico qui a destra.



(3) Si determini il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2 \arctan(x) dx$$

È conveniente procedere per parti, identificando
 x^2 con $g'(x)$ e $\arctan(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} \int x^2 \arctan(x) dx &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{1}{3} \int dx \frac{x^3}{1+x^2} = \\ &= \left\{ \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{1}{3} \int dx \frac{x^3+x}{x^2+1} + \frac{1}{3} \int dx \frac{x}{1+x^2} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{1}{3} \int dx \, x + \frac{1}{6} \int dx \, \frac{2x}{1+x^2} = \text{pag. 6}$$

$$= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \log(x^2+1)$$

(4) Si discuta la convergenza del seguente integrale:

$$\int_2^{+\infty} \frac{(1 - \cos(1/x)) \sin(1/x)}{(x^{1/x} - 1)^2} dx$$

Sia $f(x) = \frac{(1 - \cos(1/x)) \sin(1/x)}{(e^{\frac{1}{x} \log x} - 1)^2}$ la funzione integranda.

Siccome $f(x)$ è continua $\forall x \geq 2$, allora dobbiamo "solo" capire il comportamento asintotico per $x \rightarrow +\infty$.

Per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \sim \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot (1/x)}{\left(\frac{\log x}{x}\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{x^2 \cdot 1}{x^3 \log^2 x} = \frac{1}{2x \log^2 x}$

Siccome $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x \log^2 x} =$, ponendo $t = \log x$, $= \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{dt}{2t^2} = \left. \frac{1}{2t} \right|_{\log 2}^{+\infty} = \frac{1}{2 \log 2}$ è convergente, allora l'integrale di partenza,

cioè $\int_2^{+\infty} dx f(x)$ è a sua volta convergente, ~~per~~ per il teorema del confronto asintotico per integrali su intervalli illimitati.