Esame di Giugno 2015 per Calcolo I

1) Si determini il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}-2}{x}$$

E' conveniente operare la sostituzione $y=\sqrt{x}$, quindi possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}-2}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}+e^{-y}-2}{y^2},$$

Siccome siamo in presenza di una forma di indecisione $\frac{0}{0}$, possiamo applicare il teorema di de l'Hospital,

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-e^{-y}}{2y} =$$, riapplicando de l'Hospital,

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

2) Si determini il carattere delle seguenti serie:

2a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left[(-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right]$, ~~2b)~~

2b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \cos\left((-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right)\right]$.

2a) Innanzitutto osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left[(-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n \sin\left(\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right)\right],$$

~~e~~ siamo quindi in presenza di una serie a termini di segno alterno. Osservo che l'argomento del seno è t.c.

$$\sqrt{\frac{n}{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1/n}} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$ ed è decrescente per $n \geq 1$.

Siccome il seno è una funzione crescente in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \supseteq \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, allora $\sin\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$ è decrescente $\forall n \geq 1$.

Inoltre, siccome $\sin\sqrt{\frac{n}{n^2+1}} = \sin\sqrt{\frac{1}{n+1/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$, allora possiamo applicare il criterio di Leibniz e quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left[(-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right]$ <u>converge</u>.

2b) Innanzitutto, osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\cos\left((-1)^n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right)\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right)\right].$$

Dal limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$, segue che $1-\cos x=O(x^2)$, da cui otteniamo che

$$1-\cos\left(\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right)\sim\frac{n}{n^2+1}\sim\frac{1}{n} \text{ per } n\to+\infty.$$

Possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico, cioè la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right)$ avrà lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, che è la serie armonica ed è quindi divergente. Possiamo quindi concludere che la serie di partenza è a sua volta divergente.

3a) Della famiglia di funzioni

$$g_k(x)=x+\frac{3}{x}-\frac{k}{2x^2}$$

si determini il valore $\bar{k}$ t.c. $f(x)=g_{\bar{k}}(x)$ ha un p.to stazionario in $x=1/2$.

I p.ti stazionari della famiglia di funzioni $g_k(x)$ sono t.c.

$$g_k'(x) = 0,$$

quindi dobbiamo risolvere la seguente equazione

$$g_k'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{k}{x^3} = \frac{x^3 - 3x + k}{x^3} = 0$$

Affinché $x = 1/2$ sia un p.to stazionario, dobbiamo allora avere che

$$g_k'(1/2) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} + k = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{2} - \frac{1}{8} = \frac{11}{8}.$$

Di conseguenza,

$$f(x) = g_{\frac{11}{8}}(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{11}{16} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

3b) Si studi il grafico della funzione $f(x) = g_{\bar{k}}(x)$ dove $\bar{k}$ è proprio il valore calcolato al punto 3a

---

Il dominio della funzione è evidentemente $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Calcoliamo gli asintoti.

Per $x \to 0$, $f(x) \sim -\frac{11}{16} \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

Per $x \to +\infty$, abbiamo evidentemente che $f(x) \sim x$; inoltre, $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x} - \frac{11}{16} \frac{1}{x^2}\right) = 0^+$.

Per $x \to -\infty$, abbiamo invece che $f(x) \sim x$; inoltre, $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0^-$.

La funzione $f(x)$ tende quindi "da sopra" all'asintoto $y = x$ quando $x \to +\infty$, mentre ci tende "da sotto" all'asintoto per $x \to -\infty$.

La ricerca degli zeri è associata alla soluzione della seguente eq.:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 11/16}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 + 3x - \frac{11}{16} = 0$$

Trovare almeno una radice dell'eq. cubica precedente, non è semplice, quindi ci rinunciamo. È invece assai più semplice (e comunque ~~assai più~~ utile) determinare le intersezioni con la bisettrice del primo-terzo quadrante. Infatti, si tratta di risolvere la seguente eq.:

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{3}{x} - \frac{11}{16} \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{48}.$$

Passiamo allo studio della derivata prima. Abbiamo che

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{x^3 - 3x + 11/8}{x^3}$$

Sfruttiamo il fatto che conosciamo più un p.to stazionario (cioè $x = 1/2$), per scomporre il

numeratore:

$$x^3 - 3x + \frac{11}{8} = \left(x - 1/2\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}\right).$$

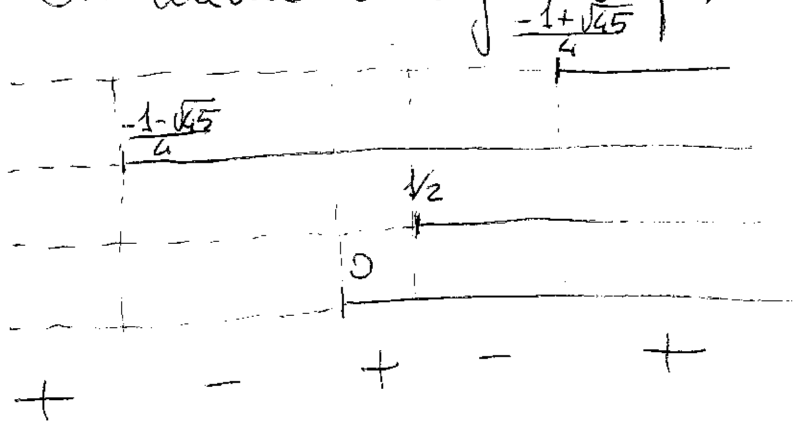
Cerchiamo gli altri p.ti stazionari:

$$f'(x) = \frac{(x-1/2)\cdot(x^2 + 1/2\,x - 11/4)}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 1/2 \text{ (già lo sapevamo!)}$$

$$\Longrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{4} = 0$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 11}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{45}}{4}$$

Studiamo il segno di f':



Qualche calcolo:

$x = \frac{-1-\sqrt{45}}{4} \simeq -1.93$

$x = \frac{-1+\sqrt{45}}{4} \simeq 1.43$

$f(-1.93) \simeq -3.7$

$f(1.43) \simeq 3.2$

$f(1/2) = \frac{1}{2} + 6 - \frac{11}{4} = \frac{13}{4} = 3.75$

Passiamo ora allo studio della concavità/convessità.

$$f''(x) = \frac{6}{x^3} - \frac{33}{8}\cdot\frac{1}{x^4} = \frac{48x - 33}{8x^4},$$

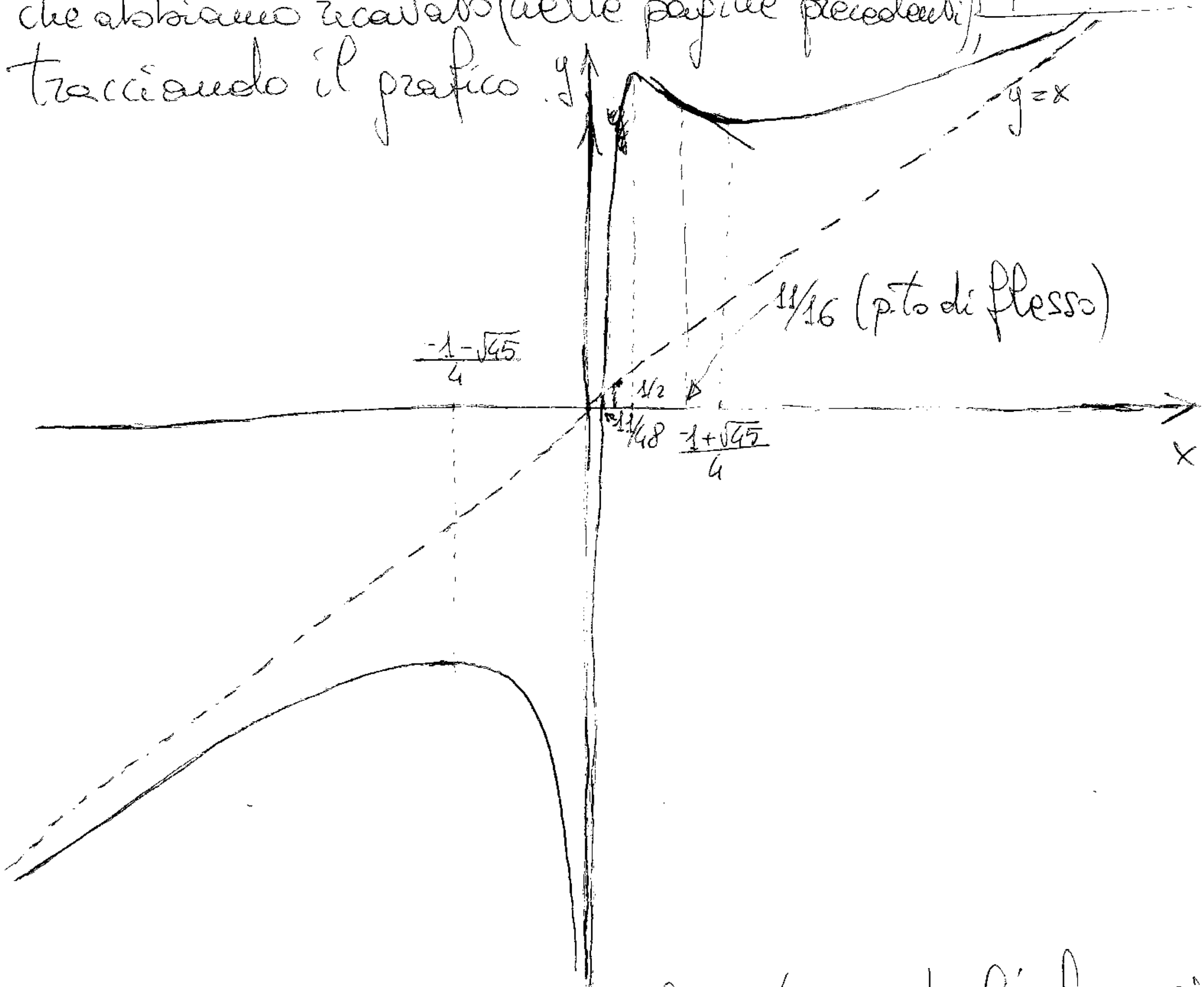
quindi $f''(x) > 0$ per $x > \frac{33}{48} = \frac{11}{16}$ (concavità verso l'alto)

$f''(x) = 0$ per $x = \frac{33}{48} = \frac{11}{16}$ (p.to di flesso)

$f''(x) < 0$ per $x < \frac{33}{48} = \frac{11}{16}$ (concavità verso il basso).

Per tracciare il grafico è utile valutare $\frac{11}{16} \simeq 0.69$ e $f\left(\frac{11}{16}\right) \simeq 3.6$

Riassumiamo tutte le informazioni che abbiamo ricavato (nelle pagine precedenti) tracciando il grafico



Si noti che abbiamo utilizzato anche l'informazione riguardante le intersezioni con la bisettrice-asintoto $y=x \Rightarrow$ in $\mathbb{R}^-$ il grafico è al di sotto di $y=x$ per $x \to 0^-$ e quindi starà sempre al di sotto.

In $\mathbb{R}^+$, c'è una sola intersezione in $x = 11/48$ e per $x \to +\infty$ il grafico è al di sopra dell'asintoto quindi il grafico sarà al di sotto di $y=x$ per $x < 11/48$ e è al di sopra quando $x \geq 11/48$.

4a) Si calcoli il valore $F(b)$, con $b \in \mathbb{R}^+$, del seguente integrale definito | pag. 8

$$F(b)=\int_0^b dx\ \frac{2-4x}{(1+x^2)^2}\,e^{\operatorname{arctg} x}=\int_0^b dx\,\frac{2}{1+x^2}\,\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}-\int_0^b dx\,\frac{4x}{(1+x)^2}\,e^{\operatorname{arctg} x},$$

dove la seconda uguaglianza deve essere interpretata come un suggerimento su quale sia il primo passaggio da intraprendere.

4b) Si discuta la convergenza sull'intervallo illimitato $[0,+\infty)$ dell'integrale proposto nell'esercizio precedente, calcolando

$$\lim_{b\to+\infty} F(b)$$

e/o applicando opportunamente i criteri di (non) integrabilità su intervalli illimitati alla funzione integranda $f(x)=\dfrac{2-4x}{(1+x^2)^2}\,e^{\operatorname{arctg} x}$.

4a) Procediamo come segue (sfruttando il suggerimento del testo e integrando per parti il primo integrale): $F(b)=\left.\dfrac{2}{1+x^2}\,e^{\operatorname{arctg} x}\right|_0^b-\displaystyle\int_0^b dx\,\frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,e^{\operatorname{arctg} x}-\int_0^b dx\,\frac{4x}{(1+x^2)^2}\,e^{\operatorname{arctg} x}$

Se ne deduce che

$$F(b) = \frac{2}{1+b^2} e^{\operatorname{arctg} b} - \frac{2}{1} e^{\operatorname{arctg} 0} =$$

$$= \frac{2}{1+b^2} e^{\operatorname{arctg} b} - 2 .$$

4b) Si calcola facilmente

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = \lim_{b\to+\infty} \frac{2e^{\operatorname{arctg} b}}{1+b^2} - 2 = -2,$$

dove abbiamo sfruttato $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$.

Di conseguenza, l'integrale che è stato proposto nell'esercizio converge sull'intervallo illimitato $[0,+\infty)$.
Saremmo potuti giungere alla stessa conclusione anche senza determinare la primitiva. Infatti, osserviamo che f è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi basta comprendere il suo carattere asintotico per decidere se l'integrale converge o meno. Siccome $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$, allora

$$f(x) \sim \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \sim \frac{x}{x^4} = x^{-3} \quad \text{per } x\to+\infty$$

Siccome $1/x^3$ è integrabile per $x\to+\infty$, allora l'integrale che è stato proposto nell'esercizio è convergen- te in $[0,+\infty)$ per il criterio del confronto asintotico su intervalli illimitati.

Questo argomento spiega a priori che $F(b)$ è convergente per $b \to +\infty$, anche senza aver calcolato $F(x)$.