

Carlo I

pag. 1

Esame di Gennaio 2016

(1) Calcolare il seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x} \log(1+x^2)}{1 - \cos x}$$

Utilizziamo le ben note relazioni asintotiche

$\sin x \sim x$ $\log(1+x^2) \sim x^2$ $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ per $x \rightarrow 0$,
in modo da ottenere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x} \cdot \log(1+x^2)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 \cdot x^2}}{\frac{1}{2} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2} x^2} = 2$$

(2A) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos(n\pi) \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right]$$

Dopo aver ricordato che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, possiamo riscrivere la serie nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos(n\pi) \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \right]$$

Osserviamo che la serie è a segni alterni, cioè è del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} [(-1)^n a_n]$ con $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$.

Osserviamo inoltre che

pag. 2

[*] a_n è definitivamente decrescente;
infatti, se poniamo $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ (di modo
che $a_n = f(n)$) possiamo facilmente comprendere
quando la successione è crescente o decrescente, studiando
il segno della derivata di f :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}}$$

Siccome il denominatore è sempre positivo e il numeratore
è sempre negativo (poiché $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$ quando entrambe le
radici sono definite, cioè $\forall x \geq 0$), abbiamo che

$$f'(x) < 0 \quad \forall x > 0 \quad (\text{cioè nell'intervallo di definizione di } f')$$

Abbiamo quindi che $f(x)$ è una funzione decrescente
in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e, quindi,

$$a_n > a_{n+1} \quad \forall n \geq 1.$$

Inoltre, è immediato verificare che

$$[**] \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$$

Siccome la serie di partenza è a segni alterni e
verifica le ipotesi del teorema di Leibnitz (cioè le
formule [*] e [**]), allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente
proprio per il teorema di Leibnitz.

(2B) Discutere la convergenza assoluta della serie già introdotta nel testo al punto (2A).

pag. 3

Dobbiamo quindi studiare il carattere della

$$\text{serie } \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \cos(n\pi) \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

dove a_n è definita esattamente come nella soluzione dell'esercizio (2A), cioè

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Abbiamo già verificato (durante la soluzione dell'esercizio (2B)) che

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ per } n \rightarrow +\infty,$$

pertanto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ per il criterio del confronto asintotico.

Di conseguenza, concludiamo che la serie proposta nel testo dell'esercizio (2A) diverge assolutamente.

(3A) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_a(x) = -\cos x + \frac{a}{4} \cos 2x + \frac{3a}{8} \quad \text{con } a > 0.$$

Si determini il valore $\bar{a}$ t.c. $f_{\bar{a}}(x)$ ha un punto di minimo stazionario in $\pi/3$.

Cerchiamo di determinare i p. to stazionari, risolvendo l'equazione $f'_2(x) = 0$, dove

$$f'_2(x) = \sin x - \frac{a}{2} \sin 2x = \sin x - a \sin x \cos x. \quad \boxed{\text{pag. 4}}$$

Ne segue che

$$\sin x (1 - a \cos x) = 0,$$

la quale è verificata quando

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$a \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = 1/a \quad (\text{si ricorda che } a \in \mathbb{R}_+).$$

Quest'ultima equazione non ammette soluzioni se $1/a > 1$, cioè $a < 1$. Se $\boxed{a \geq 1}$, allora

$$\cos x = 1/a \Rightarrow x = \arccos 1/a + 2k\pi$$

$$x = -\arccos 1/a + 2k\pi$$

Si come $-\arccos 1/a \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, l'unico modo di avere un p. to stazionario in $\pi/3$ si ottiene ponendo

$$\arccos 1/a = \pi/3 \Rightarrow 1/a = \cos \pi/3 = 1/2$$

$$\Rightarrow a = 2.$$

Per il momento, abbiamo mostrato che $\pi/3$ è un p. to stazionario per $f_2(x)$, verifichiamo ^{ora} che $\pi/3$ è un p. to di minimo. A questo scopo, calcoliamo

$$f''_2(x) = \cos x - 2 \cos(2x).$$

Per comprendere se la funzione è concava o
convessa, possiamo valutare la derivata seconda
nei p.ti stazionari, ad esempio

pag. 5

$$f_2''(\pi/3) = \cos \frac{\pi}{3} - 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

quindi, $\pi/3$ è proprio un p.to di minimo per $f_2(x)$,
perché f_2 ha la concavità verso l'alto nel p.to $x = \pi/3$.
Abbiamo quindi ottenuto che

$$\boxed{\bar{\alpha} = 2}$$

Per completezza (e per svolgere parte del lavoro che
sarà comunque richiesto dal prossimo esercizio), studiamo
anche gli altri p.ti stazionari.

Siccome f_2 è evidentemente periodica di periodo 2π ,
allora $f_2''\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = f_2''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$,

quindi $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ sono tutti p.ti di minimo $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Consideriamo ora $-\arccos(1/2) + 2k\pi = -\pi/3 + 2k\pi$

$$\rightarrow f_2''\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2},$$

quindi, anche $x = -\pi/3 + 2k\pi$ sono p.ti di minimo $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Passiamo al caso $x = 2k\pi$, abbiamo che

$$f_2''(2k\pi) = 1 - 2 = -1;$$

pag. 6

Si come la concavità è rivolta verso il basso, allora $x = 2k\pi$ sono p.t. di massimo $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Infine, nel caso $x = \pi + 2k\pi$ abbiamo che

$$f_2''(\pi + 2k\pi) = -1 - 2 = -3.$$

Anche in questo caso, abbiamo che la concavità è rivolta verso il basso, quindi $x = \pi + 2k\pi$ è un p.to di massimo.

(3B) Si tracci il grafico della funzione

$$g(x) = \frac{1}{f_{\bar{a}}(x)}$$

dove $\bar{a}$ è proprio il valore richiesto dal testo dell'esercizio (3A). Nello studio del grafico della funzione $g(x)$ si deve omettere lo studio della concavità/convessità.

Per comprendere come è fatto il dominio della funzione g (e, in generale, per tracciare il grafico di g) è fondamentale capire quale è l'andamento del grafico di f_2 . Cominciamo quindi a localizzare le coordinate dei p.t. di minimo e di massimo:

Caso dei p.ti di minimo:

pag. 7

$$f_2\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{3}{4}$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0.$$

Caso dei p.ti di massimo:

$$f_2(2k\pi) = -\cos 0 + \frac{1}{2}\cos(2 \cdot 0) + \frac{3}{4} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$e \quad f_2(\pi + 2k\pi) = -\cos \pi + \frac{1}{2}\cos 2\pi + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

In particolare, siccome $f_2(x)$ si annulla nei p.ti di minimo $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, allora $f_2(x)$ è positiva
 $\forall x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Possiamo quindi affermare che il dominio di $g(x)$ è $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Inoltre, siccome $f_2(x)$ è una funzione periodica di periodo 2π ed è pari allora anche $g(x)$ è periodica di periodo 2π ed è pari.

Siccome g è periodica, non ci sono asintoti per $x \rightarrow \pm\infty$, ma dobbiamo studiare l'andamento in prossimità dei punti singolari (cioè quelli che non appartengono a D).

Abbiamo che

pag. 8

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi} \frac{1}{f_2(x)} = +\infty$$

Perché $f_2\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = 0$, f_2 è positiva su tutto D ed è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi $f_2(x) \rightarrow 0^+$ per $x \rightarrow \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Abbiamo quindi, asintoti verticali in corrispondenza a $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Studiamo ora la crescenza/decrescenza di $g(x)$, a tale scopo calcoliamo

$$g'(x) = - \frac{f_2'(x)}{[f_2(x)]^2}$$

Osserviamo che il denominatore è positivo $\forall x$ t.c. $f_2(x) \neq 0$ e, quindi, $g'(x)$ ha sempre segno opposto rispetto a $f_2'(x)$.

Quest'ultima osservazione spiega una regola che si adotta spesso per tracciare il grafico della ^{reciproca} ~~inversa~~ di una funzione positiva: laddove f_2 cresce [decresce] la sua ^{reciproca} ~~inversa~~ g decresce [cresce]; conseguentemente, laddove f_2 ha un p.to di massimo [minimo] ed è positiva, g ha un p.to di minimo [massimo].

Concretamente, abbiamo

$$g'(x) = - \frac{\sin x - 2 \sin x \cos x}{(-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{4})^2}$$

e dobbiamo studiare il segno del numeratore

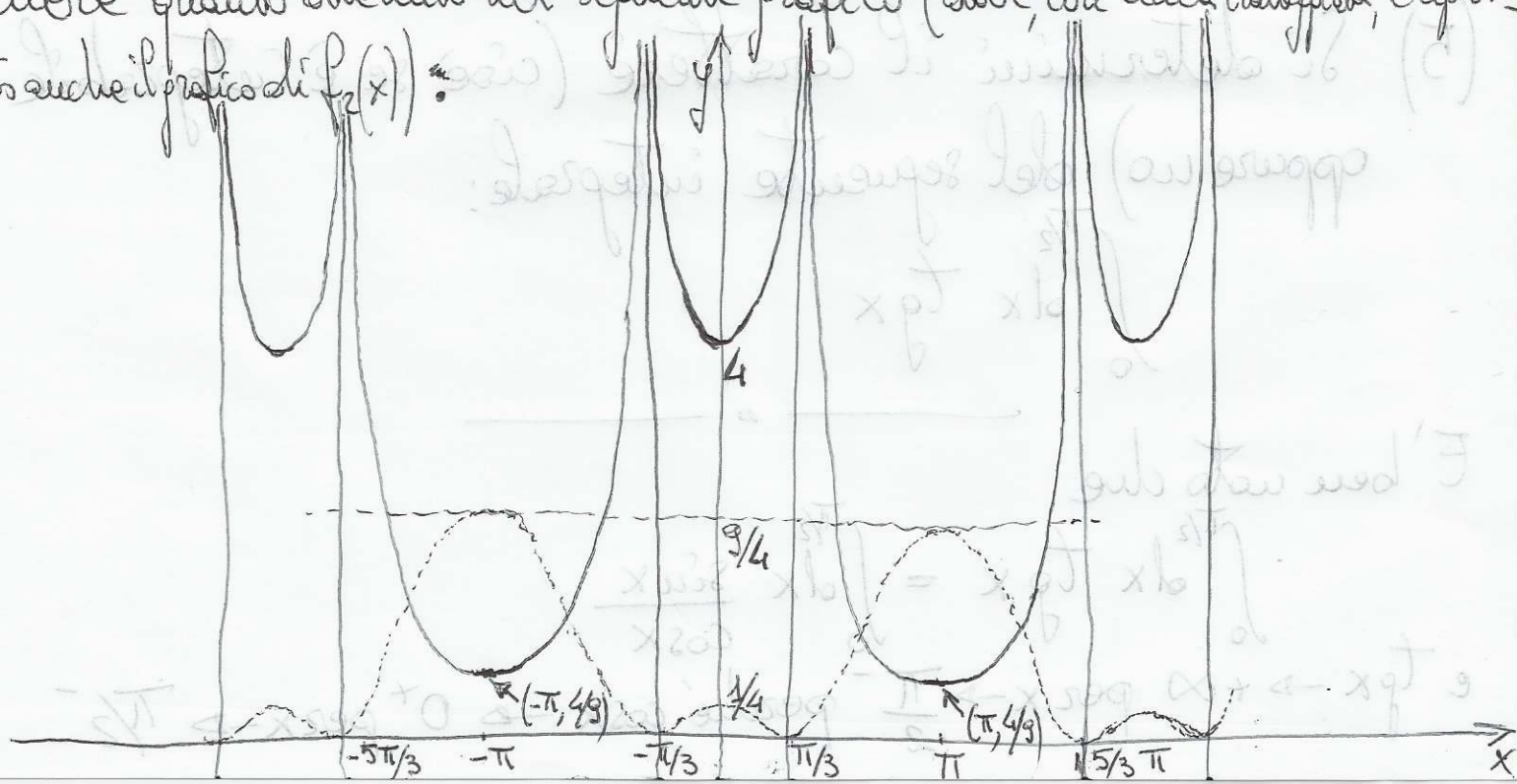
$$-f_2'(x) = -\sin x + 2 \sin x \cos x.$$

pag. 9

Potremmo studiare la disuguaglianza $-f_2'(x) > 0$, ma siccome sappiamo che $f_2(x)$ ha p.ti di minimo in $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (con valore nullo del minimo assoluto della funzione) e ha p.ti di massimo in $x = k\pi$, allora ricaviamo subito che

$$\forall k \in \mathbb{Z}, g_2(x) \text{ (proprio come } -f_2'(x)) \left\{ \begin{array}{l} \text{cresce per } x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \\ \text{decresce per } x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right) \\ \text{cresce per } x \in \left(\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) \\ \text{decresce per } x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi\right) \end{array} \right.$$

Siccome non è richiesto lo studio di $g_2''(x)$, possiamo riassumere quanto ottenuto nel seguente grafico (dove, con linee tratteggiate, è riportato anche il grafico di $f_2(x)$).



(4) Si determini il seguente integrale indefinito:

pag. 10

$$\int dx \cos^5 x$$

E' conveniente sostituire $\cos^2 x$ con $1 - \sin^2 x$, in modo da ottenere

$$\int dx \cos^5 x = \int dx (1 - \sin^2 x)^2 \cos x,$$

applichiamo poi il metodo di sostituzione, ponendo

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx, \text{ quindi}$$

$$\int dx \cos^5 x = \int dt (1 - t^2)^2 = \int dt (1 - 2t^2 + t^4) =$$

$$= t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{t^5}{5} = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5}$$

(5) Si determini il carattere (cioè se è integrabile oppure no) del seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} dx \operatorname{tg} x$$

E' bene noto che

$$\int_0^{\pi/2} dx \operatorname{tg} x = \int_0^{\pi/2} dx \frac{\sin x}{\cos x}$$

e $\operatorname{tg} x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ perché $\cos x \rightarrow 0^+$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$

Per ricondurre lo studio di questo integrale pag 11
a una forma cui siamo più abituati, procediamo ponendo

$$u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du,$$

quindi il nostro integrale diventa

$$\int_0^{\pi/2} dx \frac{\sin x}{\cos x} = - \int_{\pi/2}^0 du \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - u)}{\cos(\frac{\pi}{2} - u)} = \int_0^{\pi/2} du \frac{\cos u}{\sin u};$$

adesso, l'integranda $\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$ è continua in $(0, \frac{\pi}{2}]$, mentre
abbiamo che è illimitata quando si avvicina a 0, poiché
 $\lim_{u \rightarrow 0^+} \sin u = 0^+$. Dobbiamo quindi studiare l'integranda per $u \rightarrow 0^+$.

Osserviamo che

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \cos u = 1 \quad \text{e} \quad \sin u \sim u \quad \text{per} \quad u \rightarrow 0, \quad \text{quindi}$$

$$\frac{\cos u}{\sin u} \sim \frac{1}{u} \quad \text{per} \quad u \rightarrow 0^+.$$

$$\text{Siccome} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{du}{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log u \Big|_{\varepsilon}^{\pi/2} = +\infty,$$

$$\text{allora anche} \quad \int_0^{\pi/2} du \frac{\cos u}{\sin u} = +\infty \quad \text{per il criterio del}$$

confronto asintotico per integrali di funzioni illimitate.

Possiamo quindi concludere che l'integrale proposto
dal testo dell'esercizio, cioè

$$\int_0^{\pi/2} dx \tan x, \quad \underline{\text{non è convergente}}.$$