

Gennaio 2015

(2a) Si consideri la famiglia di funzioni $g_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$g_a(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \quad \text{dove } a \in \mathbb{R}.$$

Si determini il valore $\bar{a}$ tale che la funzione $g_{\bar{a}}$ ha minimo assoluto uguale a 0.

— o —

Possiamo affrontare il problema con due approcci: il primo è molto più veloce e evita lo studio di funzione; il secondo è più lento, ma forse più facile da intuire, proprio perché utilizza i metodi dello studio di funzione.

— Approccio veloce (che evita lo studio di funzione)

Si osserva che

$$g_a(x) = \frac{ax^2 - x + 1}{x^3}$$

è maggiore, uguale o minore di zero se e solo se lo è il numeratore (cioè $ax^2 - x + 1 \gtrless 0$), poiché il denominatore è sempre positivo (essendo $x \in \mathbb{R}^+$).

Imporre che la funzione $g_a(x)$ abbia minimo assoluto uguale a 0, significa richiedere che pag. 2 il suo numeratore soddisfi la disuguaglianza

$$\cancel{g_a(x)} \quad ax^2 - x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

e dove esistere almeno un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}^+$ t.c.
 $a\bar{x}^2 - \bar{x} + 1 = 0$.

Cominciamo a studiare la disuguaglianza

$$ax^2 - x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

Poniamo $p_a(x) := ax^2 - x + 1$. Il grafico di $p_a(x)$ è evidentemente quello di una parabola con concavità uguale ad a . È evidente che

$$\text{se } a \leq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} p_a(x) = -\infty,$$

quindi tutti i valori per cui $a \leq 0$ vanno scartati perché l'Inf. dell'ordinata del grafico è uguale a $-\infty$.

Proviamo a cercare gli zeri dell'equazione

$$p_a(x) = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}$$

Siccome ci siamo limitati a considerare $a > 0$, allora il grafico di p_a è quello di una parabola con concavità verso l'alto, quindi

Se $0 < a < 1/4$, allora ~~tra~~ nell'intervallo
 compreso tra le due soluzioni il grafico di p_a
 (e, quindi, anche quello di q_a) è negativo, cioè pag. 3
~~Infatti~~, $\forall x \text{ t.c. } \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a}$

(questo è un sol. pos.
 perché $1 > \sqrt{1 - 4a}$ e $a > 0$)

Si ha che $p_a(x) < 0$.

Se invece $a > 1/4$, allora non esistono valori
 reali per cui $p_a(x) = 0$, poiché

$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}$ ha una componente immagina-
 ria diversa da zero;

di conseguenza $\forall x \in \mathbb{R}, p_a(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+, q_a(x) > 0$.

Abbiamo quindi scartato tutti i valori a partire da $a = 1/4$.

Consideriamo il caso

$$a = 1/4,$$

allora $p_a(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$.

Essendo $p_a(x)$ un quadrato perfetto, allora esso
 è sempre positivo e si annulla in un solo p.to,
 quando $\frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$.

In corrispondenza ad $\bar{a} = 1/4$, allora
 $g_{\bar{a}}(x) > 0 \quad \forall x \neq 2$, con $x \in \mathbb{R}^+$,

pag. 4

mentre $g_{\bar{a}}(2) = 0 \rightarrow x=2$ è p.to di minimo ass.
e il minimo assoluto vale proprio 0.

- Approccio più lento (o, meglio, con più calcoli,
perché richiede lo studio
di funzione).

Cominciamo ad osservare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = \text{sign}(a) \cdot 0^{\pm} \quad \text{quando } a \neq 0$$

Possiamo quindi escludere il caso $a < 0$, perché
se $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = 0^-$, allora il minimo assoluto
non può essere uguale a 0.

Siccome anche per $a = 0$, abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_0(x) = 0^-, \text{ per la stessa ragione}$$

possiamo escludere il
caso $a = 0$.

Possiamo quindi limitarci al caso $a > 0$, quindi
avremo i seguenti limiti "alla frontiera" del
dominio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g_a(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = 0^+.$$

Calcoliamo la derivata:

pag. 5

$$g'_a(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} = -\frac{ax^2 - 2x + 3}{x^4}$$

Studio del segno

$$g'_a(x) \geq 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^+ \iff -(ax^2 - 2x + 3) \leq 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^+$$

Per comprendere quando $g_a(x)$ è crescente, studiamo la seguente disuguaglianza:

$$ax^2 - 2x + 3 < 0$$

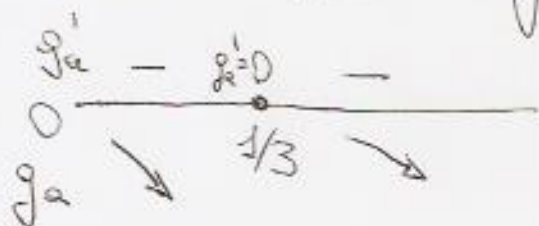
Siccome $a > 0$ il membro di sinistra della diseg. descrive una parabola con concavità verso l'alto, quindi è conveniente trovare gli zeri, cioè

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-3a}}{a} \quad \left(\text{si osserva che } x_{1,2} \in \mathbb{R} \text{ se e solo se } 1-3a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1/3 \right),$$

~~per~~ così possiamo immediatamente affermare

che se $a > 1/3 \Rightarrow g'_a(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow g_a$ decrescente su tutto $\mathbb{R}^+$

$$\text{Se } a = 1/3 \Rightarrow g'_a(x) < 0 \quad \forall x \neq x_1 = x_2 = 3$$



$\Rightarrow g_a$ decresce su tutto $\mathbb{R}^+$ ed ha un p.to di flesso orizzontale in $x=3$

Se $0 < a < 1/3 \Rightarrow g'_a(x) < 0$ per $x \in (0, x_1)$ e $x \in (x_2, +\infty)$
 $g'_a(x) > 0$ per $x \in (x_1, x_2)$

$g_a' \quad - \quad + \quad -$
 $g_a \quad \searrow \quad \nearrow \quad \searrow$
 $x_1 \quad x_2$

$\Rightarrow g_a$ ha un p.to di minimo
 in $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-3a}}{a}$ pag. 6
 e ha un p.to di max. relativo
 in $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-3a}}{a}$

Osserviamo che (siccome il prodotto delle radici $x_1 \cdot x_2 = 3a > 0$
 e la somma $x_1 + x_2 = 2$) sia x_1 che x_2 sono positive.
 Inoltre, il segno della derivata in prossimità di zero
 e di $x = +\infty$ è evidentemente in accordo con i limiti
 "alla frontiera" che abbiamo già calcolato, ovvero
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_a(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = 0^+$.

Siccome il valore del minimo assoluto (cioè 0)
 che ci viene imposto dal testo, è inferiore a
 quello dei limiti alla frontiera ^{per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = 0^+$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_a(x) = +\infty$!} allora l'unico
 modo per cui ciò avvenga è che il minimo relativo
 sia ^{anche} minimo assoluto, cioè deve verificarsi che

$$g_a(x_1) = g_a\left(\frac{1 - \sqrt{1-3a}}{a}\right) = 0$$

Studiamo l'ultima equazione che abbiamo
 scritto (in cui compare la sola a come incognita!)

$$g_a\left(\frac{1 - \sqrt{1-3a}}{a}\right) = \frac{a \left(\frac{1 - \sqrt{1-3a}}{a}\right)^2 - \frac{1 - \sqrt{1-3a}}{a} + 1}{x_1^3} = 0$$

Siccome il denominatore (x_1^3) è sempre positivo, pag. 7
 non occorre sostituirlo con $\frac{1-\sqrt{1-3a}}{a}$ perché l'eq. precedente
 è verificata se e solo se si azzera il numeratore,
 quindi abbiamo

$$\frac{1 + 1 - 3a - 2\sqrt{1-3a}}{a} - \frac{1 - \sqrt{1-3a}}{a} + \frac{a}{a} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2a = \sqrt{1-3a} \quad (\text{abbiamo eliminato il denominatore, perché sappiamo essere } a > 0).$$

$$\Rightarrow 1 - 4a + 4a^2 = 1 - 3a \quad (\text{possiamo elevare al quadrato, senza introdurre soluzioni spurie perché il radicando } 1-3a \text{ è positivo, altrimenti non c'è il p.to di minimo, quindi anche } 1-2a \text{ è pos.})$$

$$\Rightarrow \cancel{4a^2 - 4a + 3a} = 0 \quad \Rightarrow a = \begin{cases} 0 & \text{da scartare, perché siamo nel caso } a > 0 \\ 1/4 & \text{accettabile, perché compresa in } (0, 1/3). \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto che
 $\bar{a} = 1/4$ (come coll'altro metodo).

Il p.to di minimo è quindi $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 3/4}}{1/4} = 2$.

Come verifica del risultato, è facile controllare che $g_{1/4}(2) = 0$.

(2b) Si studi il grafico della funzione $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ pag. 8
tale che $f(x) = \frac{1}{4x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

(lo studio della sua concavità e convessità è da ritenersi facoltativo) -

Si osservi che $f = g_a = g_{1/4}$ dell'esercizio precedente, possiamo quindi sostanzialmente, ripetere l'approccio (quello lento) dell'esercizio precedente, adottando i calcoli:

Abbiamo i seguenti limiti "alla frontiera" del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

Lo studio degli zeri è facile, quindi lo includiamo nella discussione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{4x^3} = \frac{(x-2)^2}{4x^3} = 0 \text{ se e solo se } x=2.$$

Studio della derivata.

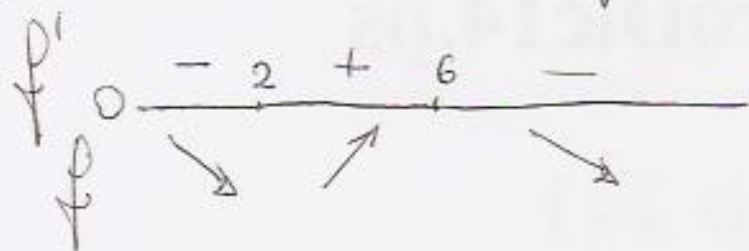
$$f'(x) = -\frac{1}{4x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} = \frac{-(x^2 - 8x + 12)}{4x^4}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0, \text{ quando } x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm \sqrt{16 - 12} < 6$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0, \text{ quando } x^2 - 8x + 12 < 0 \Rightarrow x \in (2, 6)$$

parabola con concavità verso l'alto

Possiamo quindi tirare le seguenti conclusioni riguardo alla monotonia di f pag. 9



È quindi evidente che la funzione ha un p.to di minimo in $x=2$ (in accordo con il fatto che il numeratore della funzione si annulla solo in $x=2$) e ha un p.to di max. in $x=6$.

Già sappiamo che $f(2)=0$

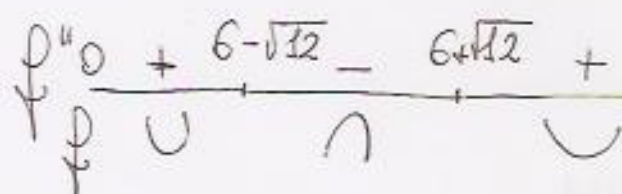
$$\text{Calcoliamo } f(6) = \frac{1}{24} - \frac{1}{36} + \frac{1}{216} = \frac{9-6+1}{216} = \frac{1}{54}$$

Studiamo la concavità/convessità della funzione. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{12}{x^4} = \frac{x^2 - 12x + 24}{2x^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \text{ in } x = 6 \pm \sqrt{36-24} = 6 \pm \sqrt{12} < \begin{matrix} 6 - \sqrt{12} \approx 2.536 \\ 6 + \sqrt{12} \approx 9.464 \end{matrix}$$

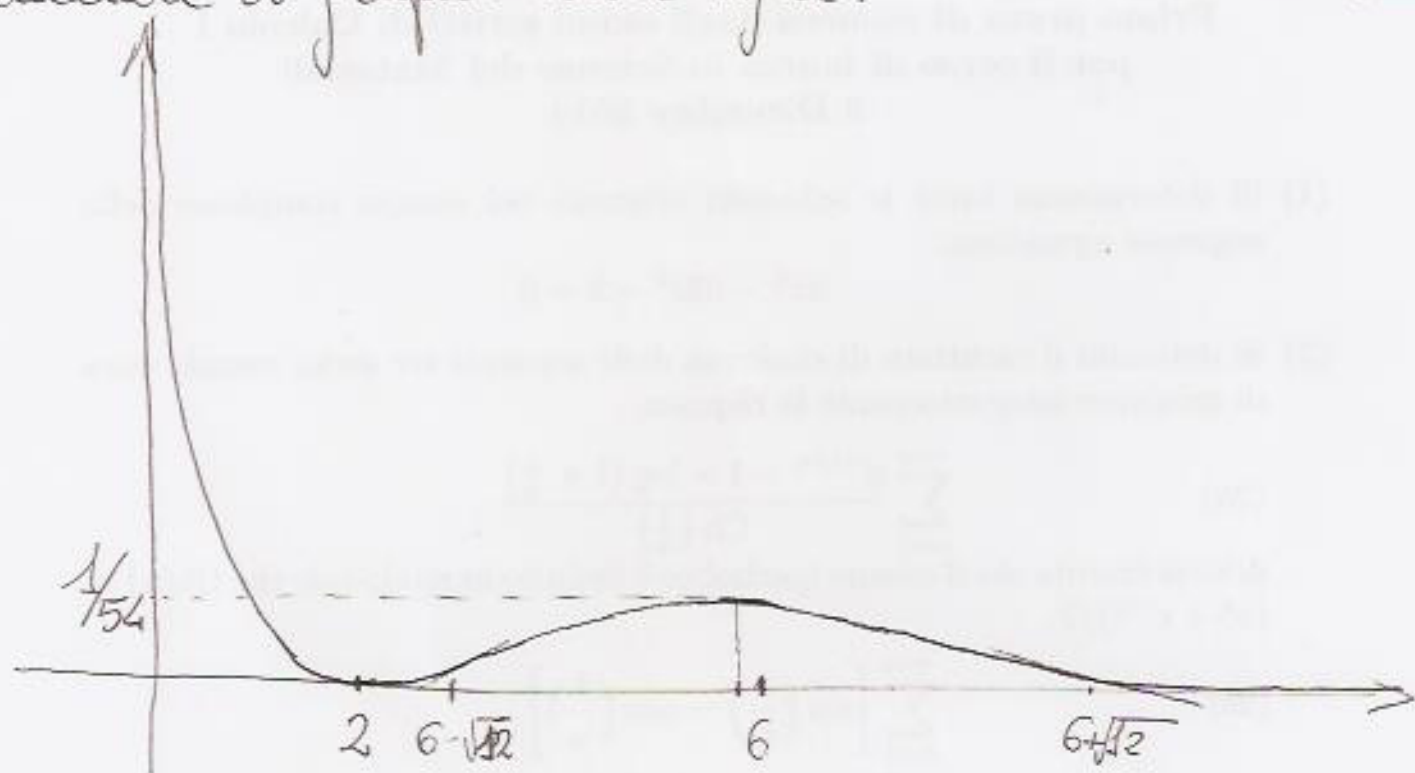
Siccome il numeratore di f'' è (ancora una volta) una parabola con concavità verso l'alto, possiamo concludere che



di conseguenza $x = 6 \pm \sqrt{12}$ sono p.ti di flesso; calcolare l'ordinata è lungo e, sostanzialmente, inutile!

Riassumendo la discussione precedente, possiamo tracciare il grafico come segue:

pag. 10



Si calcoli il valore $F(b)$ del seguente
(3a) integrale definito:

$$F(b) = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}(e^{-\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}})}$$

La primitiva dell'integrandato $f(x)$, potrebbe essere abbastanza facilmente determinata ponendo $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+e^{2\sqrt{x}})}$ per poi effettuare la sostituzione $t = e^{\sqrt{x}}$.

Scegliamo invece un procedimento che è più lento, perché è articolato su 2 sostituzioni, ma la prima di queste è molto naturale.

Infatti, poniamo

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \text{ quindi abbiamo che}$$

$$F(b) = \int_0^{\sqrt{b}} \frac{2 dt}{e^{-t} + e^t}, \text{ quest'ultimo integrale \u00e8}$$

riportato sul testo del corso
(esempio 5.2 del cap. 6) ed
\u00e8 stato trattato a lezione
\u00e8 conveniente riscriverlo nella
forma seguente:

$$F(b) = \int_0^{\sqrt{b}} \frac{2 dt}{e^{-t}(1+e^{2t})} = \int_0^{\sqrt{b}} \frac{2 e^t dt}{1+e^{2t}};$$

Si ponga ora $u = e^t \Rightarrow du = e^t dt$, allora avremo

$$F(b) = \int_1^{e^{\sqrt{b}}} \frac{2 du}{1+u^2} = 2 \operatorname{arctg} u \Big|_1^{e^{\sqrt{b}}} = 2 \operatorname{arctg} e^{\sqrt{b}} - \frac{\pi}{2}$$

(3b) Si discute la convergenza dell'integrale dell'esercizio precedente sull'intervallo illimitato $[0, +\infty)$, calcolando $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$

e/o applicando opportunamente i criteri di (non) integrabilit\u00e0 su intervalli limitati alla funzione integranda $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(e^{-\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}})}$.

Per risolvere, questo esercizio, basta calcolare

pag. 12

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

dove abbiamo utilizzato ^{la regola per il} limite di funzioni composte e il ben noto fatto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}.$$

Comunque, è facile assicurare ~~anche~~ l'integrabilità di $f(x)$ sull'intervallo $[0, +\infty)$ anche senza conoscere la primitiva. Infatti, basta ricordare che l'esponentiale va a $+\infty$ più velocemente di qualsiasi potenza (per la cosiddetta "gerarchia degli infiniti"); quindi in particolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x})^3}{e^{\sqrt{x}}} = 0, \text{ quindi abbiamo che } \exists M > 0$$

t.c. $e^{\sqrt{x}} > (\sqrt{x})^3 \quad \forall x \geq M;$

$$\text{di conseguenza, } \forall x > M \quad f(x) < \frac{1}{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}} < \frac{1}{\sqrt{x} (\sqrt{x})^3} = \frac{1}{x^2} =: g(x).$$

Si come $g(x)$ è integrabile in $[M, +\infty)$, allora anche l'integrale da $f(x)$ lo è per il criterio del confronto ~~assoluto~~ tra integrali su intervalli illimitati. Questo argomento, spiega a priori che $F(b)$ è convergente per $b \rightarrow +\infty$, anche senza aver calcolato $F(x)$.

(1) Si determini il carattere della serie pag. 13

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arctg\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$$

Il modo più semplice per comprendere il carattere della serie è fare lo sviluppo in serie della funzione

$$f(x) = \arctg x - x$$

per $x \rightarrow 0$. A questo scopo, calcoliamo

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 \Rightarrow f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 4x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2+2x^2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow f'''(0) = -2;$$

pertanto

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + o(x^3)$$

$$= -\frac{2}{3!}x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\arctg x - x \sim -\frac{1}{3}x^3 \text{ per } x \rightarrow 0$$

(avremmo potuto ottenere la stessa relazione, calcolando $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - x}{x^3}$ con il teorema de l'Hospital applicato per 3 volte consecutive).

Di conseguenza, abbiamo che

$$\arctg\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{3} \frac{1}{n^3},$$

che è un'affermazione che si può verificare direttamente,
calcolando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctg(1/n) - \frac{1}{n}}{1/n^3},$$

pag. 14

con il cambio di variabile $x = 1/n$.

Siccome $\arctg \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ è asintotica a $-\frac{1}{3n^2}$ e la serie ~~converge~~ ^{di termini}

~~usata~~ generale $1/n^3$ è convergente, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arctg\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$$

è convergente per il criterio del confronto asintotico.