

# Calcolo 1 x Sc. dei Materiali & Analisi 1 x Chimica Applicata

Scritto di Febbraio 2018

P  
A  
G.  
1

(1) Ssa  $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x) + \log(1-x)}{x} & \text{se } x \in (-1,1) \text{ e } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Utilizzando opportunamente la definizione di derivata come rapporto incrementale, si calcoli  $f'(0)$  e  $f''(0)$ .

Per definizione di derivata si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h) + \log(1-h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1-h^2)}{h^2} = -1,$$

dove abbiamo utilizzato il limite notevole  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$

Prima di calcolare  $f''(0)$ , bisogna

determinare  $f'(x) = \frac{\frac{-2x}{1-x^2} - \log(1-x^2)}{x^2} \quad \forall x \neq 0, \text{ con } x \in (-1,1).$

Ne segue che

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{2h^2}{1-h^2} - \log(1-h^2) + h^2}{h^3} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^2 - h^4}{1-h^2} - \log(1-h^2)}{h^3} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2(1+h^2) - (1-h^2)\log(1-h^2)}{h^3(1-h^2)} =, \text{ siccome } 1-h^2 \sim h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2(1+h^2) - (1-h^2)\log(1-h^2)}{h^3} =, \text{ applicando de L'Hopital,}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h - 4h^3 + 2h \log(1-h^2) + 2h}{3h^2} =, \text{ usando la formula di Taylor per il logaritmo,}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h^3 - 2h^3 + 2h \cdot o(h^2)}{3h^2} =$$

$$= -\frac{4}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} - \frac{2}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} + \frac{2}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot o(h^2)}{h^2} = 0.$$

P  
A  
G.  
2

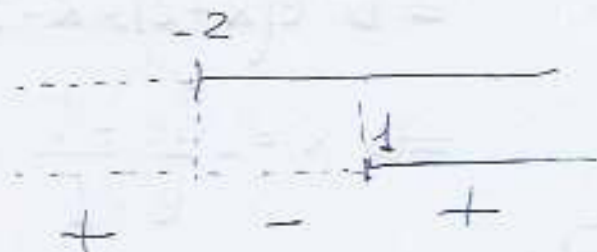
(2) Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \left| 1 + \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \right|$$

D  
A  
G.  
3

Il dominio è formato da tutti quei punti t.c.  
l'argomento del logaritmo è positivo; bisogna  
studiare la disuguaglianza

$$\frac{x+2}{x-1} > 0$$



$$\Rightarrow x < -2 \text{ o } x > 1$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}; x < -2 \vee x > 1\}$$

Evidentemente  $f(x)$  non è né pari né dispari né  
periodica.

Asintoti. Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| 1 + \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| 1 + \log\left(\frac{1+2/x}{1-1/x}\right) \right| = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| 1 + \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \right| = 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left| 1 + \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \right| = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left| 1 + \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \right| = +\infty.$$

Ne segue che  $y=1$  è un asintoto orizzontale sia per  $x \rightarrow +\infty$  che per  $x \rightarrow -\infty$ . Inoltre,  $x=-2$  e  $x=1$  sono asintoti verticali, rispettivamente per l'avvicinamento da sinistra e da destra.

Ricerca degli zeri: si tratta di risolvere l'equazione

$$\log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = -1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow e(x+2) = x-1 \Rightarrow (e-1)x = -1-2e$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2e-1}{e-1} = -2 - \frac{3}{e-1}$$

Poniamo  $x_0 = -2 - \frac{3}{e-1}$

Per comprendere l'effetto del valore assoluto, è utile chiedersi quando

$$\log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) > -1 \Rightarrow x \leq x_0 \text{ e } x > 1$$

abbiamo quindi che (per rendersene conto, si procede come per l'equazione e si osserva che si moltiplicano ambo i membri per  $x-1$ )

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in \mathbb{D} \text{ e } x \leq x_0 \\ -g(x) & \forall x \in \mathbb{D} \text{ e } x > 1 \end{cases}$$

cioè  $x_0 \leq x < -2$ , cioè  $-2 - \frac{3}{e-1} \leq x < -2$

dove  $g(x) = 1 + \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

Per comprendere l'andamento della funzione  $f$ ,  
 studiamo la derivata di  $g$

$$g'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)(x+2)}$$

$\Rightarrow g'(x) < 0 \quad \forall x \in D$ , dove abbiamo sfruttato  
 il fatto che  $(x-1)(x+2) > 0 \quad \forall x \in D$ .

Evidentemente, la  $f$  ha un p.to angoloso in  $x_0$ ,  
 poiché  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = g'(x_0) = \frac{-3}{(x_0-1)(x_0+2)} < 0$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = -g'(x_0) = \frac{3}{(x_0-1)(x_0+2)} > 0$$

Studiamo ora la concavità/convessità.

$$g''(x) = \frac{3[(x+2)+(x-1)]}{(x-1)^2(x+2)^2} = 3 \frac{2x-1}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

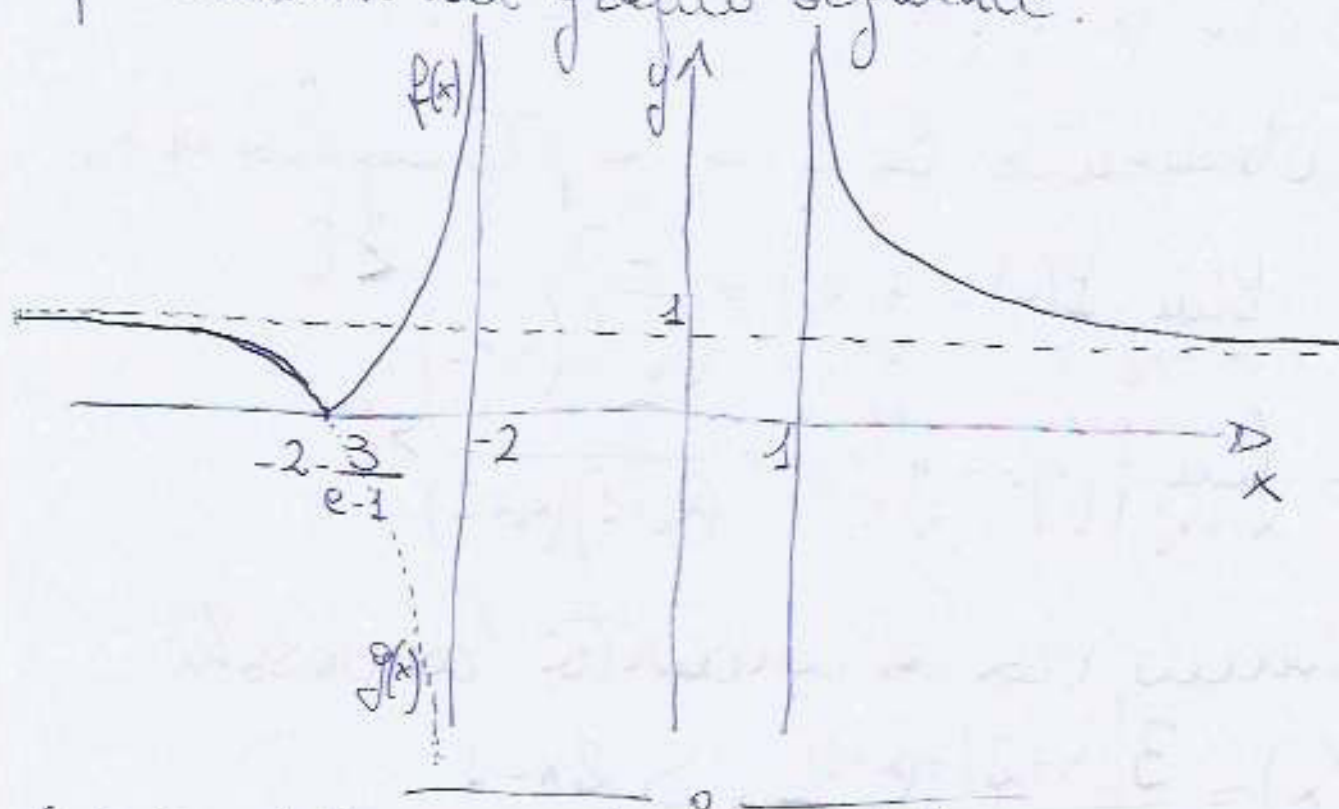
$\Rightarrow g''(x) > 0$  per  $x > \frac{1}{2}$ . Siccome  $\frac{1}{2}$  è all'interno  
 dell'intervallo dove non è definito il dominio,  
 abbiamo che  $g(x)$  ha la concavità verso l'alto  
 $\forall x > 1$  e quella verso il basso  $\forall x < -2$ .

Per effetto del cambio di segno imposto dal

valore assoluto,  $f(x)$  avrà la concavità verso il basso  $\forall x < x_0$  e verso l'alto  $\forall x > x_0$  t.c.  $x \in D$ .

p  
7  
6  
6

Possiamo riassumere tutte le informazioni precedenti nel grafico seguente.



(3) Si determini il valore del seguente integrale definito:

$$\int_0^{1/2} \frac{x e^{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

E' sicuramente conveniente porre

$$t = \arcsin x \rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Abbiamo quindi che (applicando il metodo per sostituzione) P  
A  
G.  
7

$$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/6} \sin t e^t dt.$$

Procediamo ora per parti, ponendo  $g(t) = e^t$  e  $f(t) = \sin t$ , quindi

$$\int_0^{\pi/6} \sin t e^t dt = \sin t e^t \Big|_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} \cos t e^t dt,$$

utilizzando nuovamente il metodo per parti, si ha che  $\int_0^{\pi/6} \sin t e^t dt = \frac{e^{\pi/6}}{2} - \cos t e^t \Big|_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} \sin t e^t dt$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\pi/6} \sin t e^t dt = 1 + \frac{e^{\pi/6}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\pi/6}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/6} \sin t e^t dt = \frac{1}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{4} e^{\pi/6}$$

4) Si discuta la convergenza del seguente integrale:

$$\int_2^{+\infty} dx \left( \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} - 1 \right) \frac{x^{\frac{x}{x^2+1}}}{\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$$

Per brevit , poniamo  $f(x) = \left( \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} - 1 \right) \frac{x^{\frac{x}{x^2+1}}}{\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$ , che

è la funzione integranda.

Osserviamo che

$$(A) \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2}{x^2-1}} - 1 \sim \frac{2}{x^2-1} \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{x}{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x^2+1} \log x} = 1$$

$$(C) \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \sin\left(\frac{1}{x+1/x}\right) \sim \frac{1}{x+1/x} \sim \frac{1}{x} \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

Mettendo insieme le osservazioni (A)-(C), si ottiene che

$$f(x) \sim \frac{2}{x^2-1} \cdot \frac{1}{1/x} \sim \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico per integrali definiti su intervalli illimitati, si ha che

$$\int_2^{+\infty} dx f(x) \text{ è divergente, poiché } f(x) \sim \frac{2}{x} \text{ e } \int_2^{+\infty} \frac{2dx}{x} = +\infty.$$