

Esame scritto di Febbraio 2016

- (1) Si determinino tutte le soluzioni esistenti in campo complesso dell'eq.

$$z^8 + \frac{17}{4}z^4 + 1 = 0$$

È conveniente porre $u = z^4$ e riscrivere l'equazione come segue:

$$u^2 + \frac{17}{4}u + 1 = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{-\frac{17}{4} \pm \sqrt{\frac{289}{16} - \frac{64}{16}}}{2} = \frac{-\frac{17}{4} \pm \frac{15}{4}}{2} = \frac{-17 \pm 15}{8} = \begin{cases} -4 \\ -1/4 \end{cases}$$

le soluzioni dell'eq. di partenza si ottengono quindi usando quelle di $z^4 = -4$

e quelle di $z^4 = -1/4$.

$$z^4 = -4 \Rightarrow \rho^4 e^{i4\theta} = 4 \cdot e^{i\pi} \Rightarrow \rho = \sqrt{2} \Rightarrow \theta = e^{i(k\pi/4 + k\pi/2)} \text{ con } k=0,1,2,3.$$

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -1 + i$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -1 - i$$

$$z_4 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 1 - i$$

$$z^4 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \rho^4 e^{i4\theta} = 4e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow \rho = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \theta = e^{i\pi/4 + k\pi/2}$$

pag. 2
con $k=0,1,2,3$.

$$\Rightarrow z_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1+i}{2}$$

$$\Rightarrow z_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{-1+i}{2}$$

$$\Rightarrow z_7 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \frac{-1-i}{2}$$

$$\Rightarrow z_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{1-i}{2}$$

(2A) Si discute il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \sin \left[(n-1) \frac{\pi}{2} \right] \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] \right\}$$

Facendo riferimento alla successione delle somme parziali

$$S_{2n+1} = S_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \left\{ \sin \left[(j-1) \frac{\pi}{2} \right] \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \right) \right] \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \left[(-1)^{j+1} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{2j}} \right) \right] = 0.$$

Possiamo quindi studiare la serie equivalente alla precedente, che è costituita dai soli elementi di posto pari nella serie, cioè consideriamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^{n+1} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \right].$$

Osserviamo che è una serie a termini alterni, t.c.

(a) $1 - \cos \frac{1}{\sqrt{2n}}$ è monotona decrescente, poiché

$\cos x$ è decrescente per $x \in [0, \pi]$ e $\sqrt{2n}$ è crescente
 $\Rightarrow \cos \frac{1}{\sqrt{2n}}$ è crescente $\Rightarrow 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{2n}}$ è decrescente;

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = 0^+; \quad \text{pag. 3}$$

pertanto, possiamo applicare il teorema di Leibniz e concludere che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(1/\sqrt{n})}{\sin[(n+1)\frac{\pi}{2}]}$ è convergente.

(2B) Si discuta la convergenza assoluta della serie introdotta al precedente punto (2A).

Procedendo come prima, siamo ricondotti allo studio della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \right];$$

Siccome sappiamo che

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \left(\text{essendo } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ un limite notevole} \right),$$

allora abbiamo che

$$1 - \cos \frac{1}{\sqrt{2n}} \sim \frac{1}{4n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\sin \left[(n+1) \frac{\pi}{2} \right]} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \quad \text{diverge}$$

per il criterio del confronto asintotico, siccome, per $n \rightarrow +\infty$, $1 - \cos \frac{1}{\sqrt{2n}} \sim \frac{1}{4n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} = +\infty$.

(3) Si consideri la famiglia di funzioni f_a tale che

$$f_a = a \tan x + \cot x$$

dove $a \in \mathbb{R}^+$.

(3A) Si determini in funzione di a la posizione del punto stazionario di f_a che appartiene all'intervallo $(0, \pi/2)$.

(3B) Si determini il valore $\bar{a}$ tale che quel p.to stazionario (richiesto dal testo dell'esercizio (3A)) si trovi in corrispondenza a $x = \pi/6$.

(3C) Si studi il grafico della funzione $f_{\bar{a}}(x)$ su tutto il piano cartesiano, dove $\bar{a}$ è il valore richiesto dall'esercizio (3B).

Per poter risolvere il p.to (3A), cominciamo

calcolando
$$f'_a(x) = \frac{a}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{a \sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$
$$= \frac{(a+1) \sin^2 x - 1}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

Per determinare i p.ti stazionari, imponiamo che $f'_a(x) = 0 \rightarrow (a+1) \sin^2 x = 1$.

x è un p.to stazionario, quindi, se è sol. pag. 54
risolve l'equazione

$$\sin^2 x = \frac{1}{a+1} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{a+1}}$$

$$\Rightarrow x = \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{a+1}} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{a+1}} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

la soluzione t.c. $x \in (0, \pi/2)$ è "la più semplice", cioè

$$\boxed{x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{a+1}}}$$

Per quanto riguarda il p.to (B), imponiamo quindi
che $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{a+1}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a+1}} = \sin \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a+1} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a+1=4 \Rightarrow a=3$$

Passiamo allo studio del grafico di

$$f_a(x) = 3 \tan x + \cotg x$$

f_a è definito ovunque, tranne nei p.ti ~~int.~~ t.c.

$\sin x = 0$ o $\cos x = 0$, cioè per $x = k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow f_a: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dove } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Osserviamo che f_a è dispari perché è data dalla

Inoltre, f_a è periodica di periodo π perche' è data dalla somma di due funzioni periodiche di periodo π . pag. 6

Di conseguenza è fondamentale studiare f_a nell'intervallo $(0, \pi/2)$, perche' per "disparità" saremo subito in grado di ricavare il grafico in $(-\pi/2, 0)$ e (per periodicità) su tutto $\mathbb{R}$.

Calcoliamo i limiti in prossimità delle singolarità del dominio. Per quanto detto in precedenza, ci basta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_a(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (3 \tan x + \cot x) = +\infty.$$

Passiamo ora al calcolo della derivata (che abbiamo già fatto in precedenza, al variare di a):

$$f'_a(x) = \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Ripetendo i calcoli effettuati per risolvere il punto (3A), otteniamo che l'unico p.to stazionario nell'intervallo $(0, \pi/2)$ si ha in corrispondenza a

$$x = \arcsin \frac{1}{2} = \pi/6.$$

Inoltre, $f'_a(x) > 0$ quando $4 \sin^2 x > 1$, cioè (siccome $\sin x > 0$ per $x \in (0, \pi/2)$) $\Rightarrow \sin x > 1/2 \Rightarrow x \in (\pi/6, \pi/2)$.

Abbiamo quindi che $x = \pi/6$ è un 1° p.p.
 p.to di minimo e la funzione f_a è crescente [decrescente] in $(\pi/6, \pi/2)$ $[(0, \pi/6)]$.

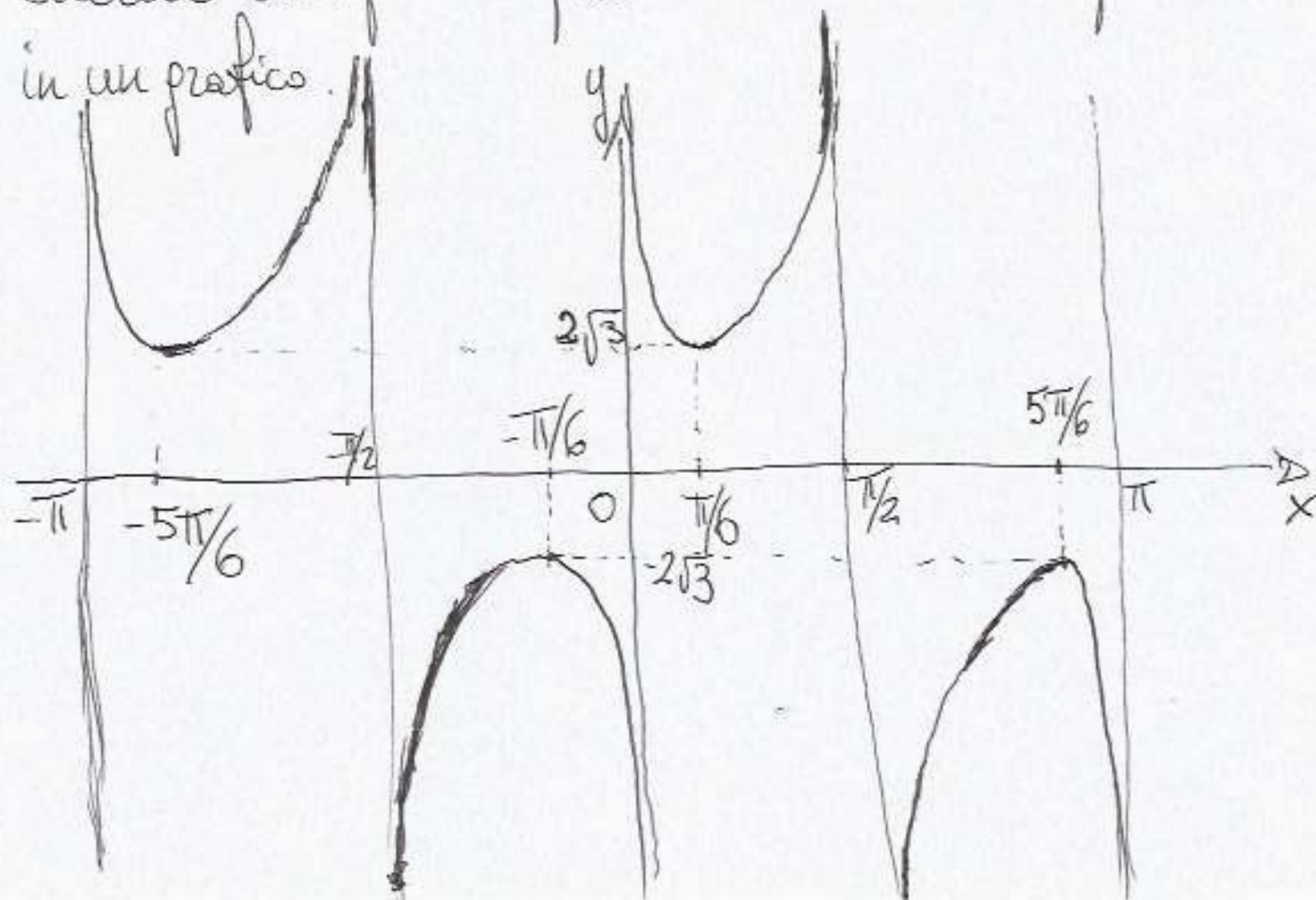
Passiamo allo studio della concavità/convessità.
 Calcoliamo

$$f_a''(x) = \frac{6 \sin x}{\cos^3 x} + \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} = \frac{6 \sin^4 x + 2 \cos^4 x}{\sin^3 x \cos^3 x}$$

Osserviamo che

$f_a''(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi/2)$, quindi f_a è
convessa in $(0, \pi/2)$.

Siamo ora pronti per riassumere tutte le informazioni
 in un grafico.



(4A) Si calcoli il valore del seguente integrale definito:

$$F(M) = \int_0^M dx x^2 \arctan x$$

pag. 8

(4B) Si determini il valore del seguente limite:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} F(M)$$

Procediamo per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^M dx x^2 \arctan x &= \left. \frac{x^3}{3} \arctan x \right|_0^M - \int_0^M dx \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{M^3}{3} \arctan M + \\ &- \frac{1}{3} \int_0^M \frac{x^3+x}{1+x^2} dx + \frac{1}{3} \int_0^M dx \frac{x}{1+x^2} = \\ &= \frac{M^3}{3} \arctan M - \frac{1}{3} \int_0^M dx x + \frac{1}{6} \int_0^M dx \frac{2x}{1+x^2} = \\ &= \frac{M^3}{3} \arctan M - \frac{1}{6} M^2 + \frac{1}{6} \log(1+x^2) \Big|_0^M = \\ &= \frac{M^3}{3} \arctan M - \frac{M^2}{6} + \frac{1}{6} \log(1+M^2) \end{aligned}$$

Passiamo al punto (4B), dopo aver osservato che

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \arctan M = \pi/2$$

è facile ~~oss~~ verificare che

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} F(M) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{M^3}{3} \arctan M - \frac{M^2}{6} + \frac{1}{6} \log(1+M^2) \right] = +\infty$$

Si osserva che si può arrivare alla stessa conclusione senza conoscere $F(M)$ esplicitamente.