

Esame di Calcolo I

pag. 1

Febbraio 2015

- 1) Si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^3 - z = -\frac{1}{z}$$

È conveniente riscrivere l'equazione nel modo seguente: $z^3 - z + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{z^4 - z^2 + 1}{z} = 0}$.

Imponiamo, come condizione di esistenza delle soluzioni che sia

$$z \neq 0$$

Dobbiamo trovare soluzioni che soddisfanno l'equazione (di annullamento del numeratore)

$$z^4 - z^2 + 1 = 0$$

È conveniente introdurre la variabile ausiliaria

$$t = z^2$$

Dobbiamo quindi risolvere

$$t^2 - t + 1 = 0$$

che ammette le seguenti radici

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Al fine di calcolare le radici quadrate (nel campo complesso) delle soluzioni $t_{1,2}$, è conveniente esprimere $t_{1,2}$ in forma trigonometrica (o, meglio ancora, di Gauss)

Tenendo conto che

$$|t_{1,2}| = 1, \quad \operatorname{Re}(t_{1,2}) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(t_{1,2}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

otteniamo che

$$t_{1,2} = e^{\pm i\pi/3} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right)$$

A questo punto, per ottenere le soluzioni $z_{1,2,3,4}$, basta trovare tutte le radici quadrate (nel campo complesso $\mathbb{C}$) di $t_{1,2}$, cioè

$$z_1 = e^{(i\pi/3)/2} = e^{i\pi/6} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_2 = e^{(i\pi/6 + \pi)} = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_3 = e^{(-i\pi/3)/2} = e^{-i\pi/6} = \cos -\frac{\pi}{6} + i \sin -\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_4 = e^{(-i\pi/6 + \pi)} = e^{i5\pi/6} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

2) Si determini il valore del seguente limite: pag. 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - e^{x^2}}{x - \log(1+x)}$$

Osserviamo che non si può utilizzare il limite notevole $\log(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$, per comprendere a cosa è asintotico il denominatore.

Dal momento il limite si presenta nella forma $0/0$, allora possiamo applicare (una prima volta) il teorema di de l'Hospital, in modo da ottenere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - e^{x^2}}{x - \log(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x e^{2x^2} - 2x e^{x^2}}{1 - \frac{1}{1+x}}$$

Abbiamo ottenuto una forma di indecisione del tipo $0/0$, quindi riappliciamo il teorema di de l'Hospital, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - e^{x^2}}{x - \log(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 + 16x^2)e^{2x^2} - (2 + 4x^2)e^{x^2}}{\frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{4-2}{1}$$

$$= 2.$$

3) Si determini il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

Per comprendere a cosa è asintotico il pag. 4
termine generale della serie, è sicuramente
conveniente scriverne lo sviluppo in serie di
Taylor. A questo scopo, ricordiamo che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

(come si può controllare in sezione 5.3 del libro
di testo); ne segue quindi che

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Siccome il termine generale della serie è
quindi asintotico a $\frac{1}{6n^{3/2}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ è conver-
gente, allora anche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

è convergente per il criterio del confronto asinto-
tico.

4) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2} - x \log x$$

pag. 5

4a) Si calcoli la derivata f' e, dopo aver osservato che $f'(1) = -1$, si dimostri che l'equazione $f'(x) = 0$ ammette due (e due sole!) soluzioni.

Come richiesto dal testo, calcoliamo

$$f'(x) = x - 1 - \log x - 1 = x - 2 - \log x$$

Osserviamo che il dominio di f è uguale a quello di f' , cioè è $\mathbb{R}^+$. Inoltre, sia f che f' sono funzioni continue. Calcoliamo i valori della derivata ai limiti della frontiera:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Ne segue che $\exists \varepsilon$ ~~e~~ $0 < \varepsilon < 1$ e $N > 1$, t.c.

$$f'(\varepsilon) > 0 \quad \text{e} \quad f'(N) > 0$$

Siccome $f'(1) = -1$ (come suggerito dal testo), allora possiamo applicare il teorema degli zeri a f' nell'intervallo $[\varepsilon, 1]$, poiché

(I) f' è continua in $[\varepsilon, 1]$;

(II) $f'(\varepsilon) \cdot f'(1) < 0$;

di conseguenza, $\exists \tau_1 \in (\varepsilon, 1)$ t.c.

$$f'(\tau_1) = 0.$$

Possiamo ripetere il ragionamento (descritto proprio
appena sopra), in modo da applicarlo all'intervallo
 $[1, M]$; siamo quindi certi che $\exists$ una seconda
radice $\tau_2 \in (1, M)$ tale che

$$f'(\tau_2) = 0.$$

Verifichiamo che non possono esistere altre radici.
A questo scopo, calcoliamo

$$f''(x) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) > 0 & \text{quando } x > 1 \\ f''(x) < 0 & \text{quando } 0 < x < 1 \\ f''(x) = 0 & \text{quando } x = 1 \end{cases}$$

Non ci interessa $\rightarrow$
~~calcolare~~ la concavità/concavità
di f per $x < 0$, perché f e
 f' sono definite in $\mathbb{R}^+$.

Supponiamo che $\exists$ esista τ_3 t.c. $f'(\tau_3) = 0$. Siccome
sappiamo che $f'(1) = -1$, allora $\tau_3 \neq 1$; potrà allora succedere che

$\tau_3 < 1$ oppure $\tau_3 > 1$.

pag. 7

Per fissare le idee, cominciamo a trattare il caso $\tau_3 > 1$ e, ovviamente, $\tau_2 \neq \tau_3$ (altrimenti non sarebbe una terza soluzione!). Applichiamo il teorema di Lagrange a f' (che è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}^+$) sull'intervallo $[\tau_2, \tau_3]$ (o se $\tau_3 < \tau_2$, sull'intervallo $[\tau_3, \tau_2]$); allora $\exists c$ compreso tra τ_2 e τ_3 tale che

$$f''(c) = \frac{f'(\tau_2) - f'(\tau_3)}{\tau_2 - \tau_3} = \frac{0 - 0}{\tau_2 - \tau_3} = 0,$$

ma ciò è assurdo! Infatti, siccome sia τ_2 che τ_3 sono maggiori di 1, allora si avrebbe che $c > 1$ ma abbiamo visto che $f''(x)$ si annulla solo in $x = 1$!

Nel caso in cui $\tau_3 < 1$, si può utilizzare lo stesso ragionamento, applicando il teorema di Lagrange ~~all'intervallo~~ a f' sull'intervallo $[\tau_1, \tau_3]$ (o $[\tau_3, \tau_1]$). Anche in questo caso, si finirebbe all'assurdo perché esisterebbe un valore $c < 1$ t.c. $f''(c) = 0$ e ciò non può essere!

4b) Dette z_1 e z_2 le radici dell'equazione $f'(x)=0$ si determinano due intervalli $[\alpha, \beta]$ e $[\gamma, \delta]$ tali che $z_1 \in (\alpha, \beta)$, $z_2 \in (\gamma, \delta)$ e le loro ampiezze sono inferiori o uguali a $1/10$ (cioè $|\beta - \alpha| \leq 1/10$ e $|\delta - \gamma| \leq 1/10$). [pag. 8]

Si tratta di applicare il metodo di bisezione, che è alla base della dimostrazione del teorema degli zeri. Sappiamo che $z_1 < 1$, per tentativi, identifichiamo 2 valori a_0 e b_0 t.c. sono entrambi minori di 1 e $f'(a_0) \cdot f'(b_0) < 0$:

$$a_0 = 0.1 \Rightarrow f'(a_0) \approx 0.4, \quad b_0 = 0.5 \Rightarrow f'(b_0) \approx -0.8.$$

Poniamo $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 0.3$, siccome $f'(c_1) \approx -0.5$,

allora $z_1 \in (a_1, b_1)$ con $a_1 = a_0 = 0.1$ e $b_1 = c_1 = 0.3$.

Poniamo $c_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0.2$, siccome $f'(c_2) \approx -0.2$, $\rightarrow z_1 \in (a_2, b_2)$

con $a_2 = a_1 = 0.1$ e $b_2 = c_2 = 0.2$.

Con una notazione più "fisica" possiamo scrivere

$$z_1 = 0.15 \pm 0.05, \text{ quindi } \alpha = 0.1 \text{ e } \beta = 0.2,$$

poiché $z_1 \in (\alpha, \beta) = (0.1, 0.2)$.

Per quanto riguarda z_2 , anche in questo caso, isoliamo a_0, b_0 entrambi maggiori di 1, t.c. $f'(a_0) \cdot f'(b_0) < 0$.

Ad esempio, $a_0 = 3 \Rightarrow f'(a_0) = -0.099$, $b_0 = 3.8 \Rightarrow f'(b_0) \approx 0.46$.

Poniamo $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 3.4$. Siccome $f'(c_1) \approx 0.18$, pag. 9
allora $z_1 \in (a_1, b_1)$, dove $a_1 = a_0 = 3$ e $b_1 = c_1 = 3.4$.

Poniamo $c_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 3.2$. ~~Siccome $f'(c_2) \approx 0.07$~~ Siccome $f'(c_2) \approx 0.07$
 $\Rightarrow z_2 \in (a_2, b_2)$, dove $a_2 = a_1 = 3$ e $b_2 = c_2 = 3.2$

Poniamo $c_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 3.1$. Siccome $f'(c_3) \approx -0.031$,
allora $z_3 \in (a_3, b_3)$, dove $a_3 = c_3 = 3.1$ e $b_3 = b_2 = 3.2$.

Con una notazione più "fisica" possiamo dire che
 $z_2 = 3.15 \pm 0.05$, quindi poniamo $\mu = 3.1, \sigma = 0.05$
 $\Rightarrow z_2 \in (\mu, \sigma)$.

5) Si studi il grafico di $f(x) = \frac{(x-2)^2}{2} - x \log x$,
tenendo conto del risultato enunciato al punto
4a e possibilmente di quanto ottenuto riguardo
al punto 4b.

Come detto in precedenza, il dominio di f è
quello di $f'(x) = x - 2 - \log x$ è $\mathbb{R}^+$.

Calcoliamo i limiti alla "frontiera del dominio".

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(x-1)^2}{2} - x \log x \right] = \frac{1}{2}, \text{ poiché } \text{de l'Hospital}$$

pag. 10

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} \stackrel{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0.$$

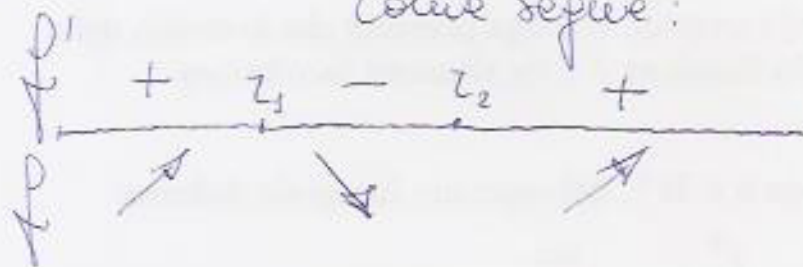
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-1)^2}{2} - x \log x \right] = +\infty.$$

Abbiamo inoltre già verificato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Siccome esistono 2 sole soluzioni (τ_1 e τ_2) t.c.

$f'(x) = 0$, allora possiamo riassumere alcune informazioni come segue:



In altre parole, la funzione f è crescente in $(0, \tau_1)$ e in $(\tau_2, +\infty)$, mentre è decrescente in (τ_1, τ_2) .

Per localizzare i p.t. di minimo e di massimo sul grafico, calcoliamo

$$(\tau_1, f(\tau_1)) \simeq (0.15, f(0.15)) \simeq (0.15, 0.65)$$

$$(\tau_2, f(\tau_2)) \simeq (3.15, f(3.15)) \simeq (3.15, -1.3)$$

Lo studio della concavità/convessità, in pratica, è già

stato affrontato nella soluzione del punto 4a. Pag. 11
In breve, abbiamo che

$$f''(x) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ (cioè la concavità è verso l'alto) quando } x > 1$$

$$\Rightarrow f''(x) < 0 \text{ (cioè la concavità è verso il basso) quando } 0 < x < 1.$$

L'unico p.to di flesso è in
 $(1, f(1)) = (1, 0)$

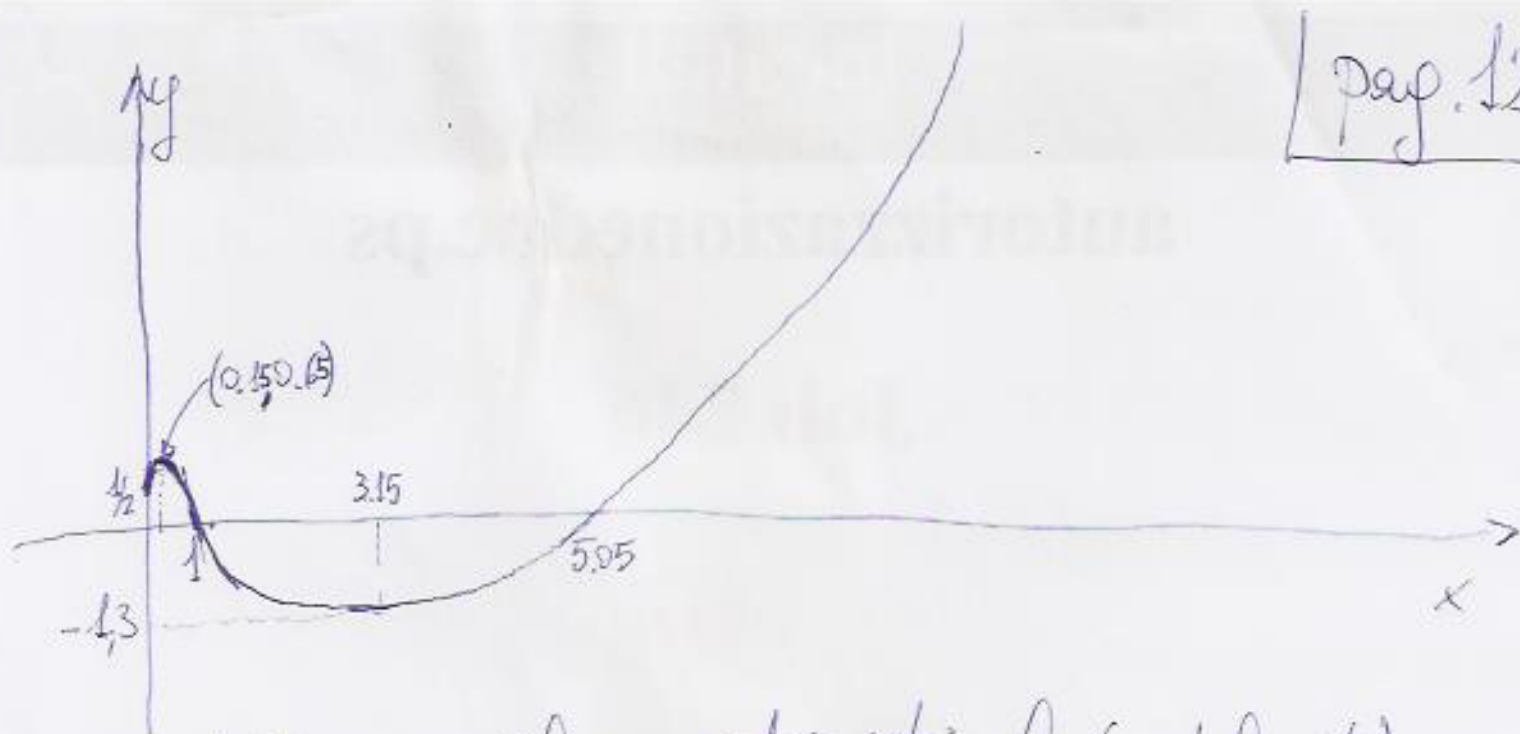
e la retta tangente al p.to $(1, 0)$ ha coeff. ang. uguale a $f'(1) = 1$.
Abbiamo quindi trovato uno zero. Con un argomento simile a quello usato al punto (4a), si mostra che c'è un solo altro passaggio per l'asse delle ascisse e, con una tecnica simile a quella usata per il p.to (4b), si mostra che questo altro zero appartiene all'intervallo $(5, 5.1)$.

Infine, siccome è evidente che

$$f(x) \sim x^2 \text{ per } x \rightarrow +\infty,$$

allora f ha l'asintoto obliquo (o orizzontale) per $x \rightarrow +\infty$.

Le informazioni che abbiamo ottenuto sono raccolte nel grafico seguente:



6) Si determini il seguente integrale (indefinito)

$$\int dx x^4 \log x$$

È conveniente risolvere il precedente integrale per parti, prendendo $f(x) = \log x$ e $g'(x) = x^4 \rightarrow g(x) = \frac{x^5}{5}$.

Di conseguenza, abbiamo

$$\begin{aligned} \int dx x^4 \log x &= \frac{x^5}{5} \log x - \int dx f'(x) \cdot g(x) = \\ &= \frac{x^5}{5} \log x - \int dx \frac{x^5}{5x} = \frac{x^5}{5} \log x - \frac{x^5}{25} \end{aligned}$$

Ovviamente, ogni altra primitiva F t.c. $F'(x) = x^4 \log x$ è tale che

$$F(x) = \frac{x^5}{5} \log x - \frac{x^5}{25} + C$$

↑
costante additiva.