Prova scritta del terzo appello d'esame di Calcolo I
per il corso di laurea in Scienze dei Materiali
23 Giugno 2015

(1) Si calcoli il valore del seguente limite, avendo cura di motivare adeguatamente i passaggi, laddove è necessario:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}} - 2}{x} \ .$$

(2) Si detemini il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left((-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} \right) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \cos\left((-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} \right) \right] \ .$$

(3a) Si consideri la famiglia di funzioni g_k tale che

$$g_k(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{k}{2x^2} \ .$$

Si determini il valore $\bar{k}$ tale che la funzione $f(x) = g_{\bar{k}}(x)$ ha un punto stazionario in $x = 1/2$.

(3b) Si studi il grafico della funzione f su tutto il suo dominio di definizione, dove $f = g_{\bar{k}}$ e $\bar{k}$ è proprio il valore richiesto al precedente punto (3a). Durante lo svolgimento dell'esercizio, si tenga presente che è conveniente sostituire la ricerca degli zeri con la determinazione delle intersezioni del grafico con la bisettrice del primo–terzo quadrante $y = x$ (in questo caso, ciò è assai più semplice e fornisce informazioni altrettanto utili).

(4a) Si calcoli il valore $F(b)$, con $b \in \mathbf{R}^+$, del seguente integrale definito:

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_0^b \mathrm{d}x \, \frac{2-4x}{(1+x^2)^2} e^{\mathrm{arctg}(x)} \\ &= \int_0^b \mathrm{d}x \, \frac{2}{1+x^2} \frac{e^{\mathrm{arctg}(x)}}{1+x^2} - \int_0^b \mathrm{d}x \, \frac{4x}{(1+x^2)^2} e^{\mathrm{arctg}(x)} \ , \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza (cioè quella tra l'integrale che appare nella prima riga e l'espressione riportata nella seconda riga) è da considerarsi un suggerimento di quale sia il primo passaggio da intraprendere, al fine di risolvere l'esercizio.

(4b) Si discuta la convergenza sull'intervallo illimitato $[0, +\infty)$ dell'integrale proposto nell'esercizio precedente, calcolando

$$\lim_{b \to +\infty} F(b)$$

e / o applicando opportunamente i criteri di (non) integrabilità su intervalli illimitati alla funzione integranda $f(x) = \frac{2-4x}{(1+x^2)^2} e^{\operatorname{arctg}(x)}$.