

**Prova scritta del primo appello d'esame di Calcolo 1
per il corso di laurea in Scienze dei Materiali e di
Analisi 1 per il corso di laurea in Chimica Applicata
23 Gennaio 2018**

- (1) Si calcoli il valore del seguente limite, avendo cura di motivare adeguatamente i passaggi, laddove è necessario:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \sin x)^{\frac{1}{x^2 - 2x^3}} .$$

- (2) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 - 2 \cos x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} .$$

- (2A) Utilizzando opportunamente la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, si calcoli $f'(0)$.

- (2B) Utilizzando opportunamente la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, si calcoli $f''(0)$.

- (3A) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_a(x) = -x^4 + ax^2 + 29 .$$

Si determini quel solo valore \bar{a} dell'indice a per cui la distanza tra i due punti di massimo di $f_a(x)$ è uguale a 4.

- (3B) Si studi il grafico della funzione $g(x) = \log(f_{\bar{a}}(x))$ tale che il valore di \bar{a} è fissato così come richiesto dal testo dell'esercizio (3A). La discussione della concavità / convessità della funzione $g(x)$ è da *ritenersi facoltativa*.

- (4) Tenendo conto della relazione

$$\left(\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right)' = \frac{1 - (2n-3)x^2}{(1+x^2)^n}$$

(valida $\forall n \in \mathbf{Z}$), si determini il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} .$$

- (5) Si discuta la convergenza del seguente integrale:

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{\sqrt{x+2} \arctan(x)}} dx .$$