Prova scritta del primo appello d'esame di Calcolo I
per il corso di laurea in Scienze dei Materiali
27 Gennaio 2015

(1) Si detemini il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] \ .$$

(2a) Si consideri la famiglia di funzioni $g_a : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ tale che

$$g_a(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ ,$$

dove il parametro $a \in \mathbf{R}$. Si determini il valore $\bar{a}$ tale che la funzione $g_{\bar{a}}$ ha minimo assoluto uguale a 0.

(2b) Si studi il grafico della funzione $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{1}{4x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ .$$

Durante lo svolgimento dell'esercizio, si tenga presente che lo studio della concavità / convessità della funzione f è da ritenersi facoltativo.

(3a) Si calcoli il valore $F(b)$, con $b \in \mathbf{R}^+$, del seguente integrale definito:

$$F(b) = \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(e^{-\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}\right)} \ .$$

(3b) Si discuta la convergenza sull'intervallo illimitato $[0, +\infty)$ dell'integrale proposto nell'esercizio precedente, calcolando

$$\lim_{b \to \infty} F(b)$$

e / o applicando opportunamente i criteri di (non) integrabilità su intervalli illimitati alla funzione integranda $f(x) = 1/\left[\sqrt{x}\left(e^{-\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}\right)\right]$.