Prova scritta del secondo appello d'esame di Calcolo I
per il corso di laurea in Scienze dei Materiali
5 Febbraio 2015

(1) Si determinino tutte le soluzioni esistenti nel campo complesso della seguente equazione:

$$z^3 - z = -\frac{1}{z}$$

(2) Si calcoli il valore del seguente limite, avendo cura di motivare adeguatamente i passaggi, laddove è necessario:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^2} - e^{x^2}}{x - \log(1+x)} \ .$$

(3) Si detemini il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] \ .$$

(4a) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2} - x\log x \ .$$

Si calcoli la derivata f' e si dimostri che l'equazione $f'(x) = 0$ ammette due (e due sole!) soluzioni $^{\odot}$.

(4b) Siano r_1 e r_2 le due soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$, si determinino due intervalli $[\alpha, \beta]$ e $[\gamma, \delta]$ tali che $r_1 \in (\alpha, \beta)$, $r_2 \in (\gamma, \delta)$ e le loro ampiezze non siano superiori a 1/10 (cioè $\beta - \alpha \le 0.1$ e $\delta - \gamma \le 0.1$).

(5) Si studi il grafico della funzione $f(x) = (x-1)^2/2 - x\log x$, che è stata introdotta al punto (4a), tenendo conto del risultato enunciato proprio in (4a) e, possibilmente, della soluzione del punto (4b).

(6) Si determini il seguente integrale (indefinito):

$$\int \mathrm{d}x\, x^4 \log x \ .$$

$^{\odot}$ A tale scopo è conveniente osservare che $f'(1) = -1$.