Prima prova di esonero dagli esami scritti di Calcolo 1 per il corso di laurea in Scienza dei Materiali e di Analisi 1 per il corso di laurea in Chimica Applicata
20 Novembre 2018

(1) Si calcolino i seguenti limiti, avendo cura di motivare adeguatamente i passaggi, laddove è necessario.

(1A) $$\lim_{x\to+\infty}\Big(\mathrm{Ch}(x)\Big)^{1-\sqrt{(x+1)/x}} \quad ,$$

dove si ricorda la definizione del coseno iperbolico: $\mathrm{Ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$.

(1B) $$\lim_{x\to 1}\frac{\big(\sqrt[3]{x}-1\big)\log x}{x^2-2x+1} \quad .$$

(2) Si determinino i valori dei parametri reali c e α tali per cui vale la seguente relazione:

$$1-\cos\left(\sqrt[4]{\frac{n}{n^3+1}}\right) \sim \frac{c}{n^\alpha} \qquad \text{per } n\to\infty\,.$$

(3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\big(1-\cos x\big)\sin x}{x} & \text{per } x\neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad .$$

(3A) Utilizzando opportunamente la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, si calcoli $f'(0)$.

(3B) Utilizzando opportunamente la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, si calcoli $f''(0)$.

(4) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, definita come segue:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + (x^2+1)^2 - 4\ .$$

(4A) Si verifichi che il grafico della suddetta funzione $f(x)$ interseca due sole volte l'asse delle ascisse in tutto il suo dominio.

(4B) Inoltre, facoltativamente, si determini un intervallo $[\alpha, \beta]$ tale che la sola soluzione *positiva* $\bar{x}$ dell'equazione $f(x) = 0$ appartenga a (α, β) e la sua ampiezza non sia superiore a $1/4$ (cioè $\beta - \alpha \leq 0.25$), utilizzando opportunamente il *metodo di bisezione*.