Prima prova di esonero dagli esami scritti di Calcolo 1 per il corso di laurea in Scienze dei Materiali e di Analisi 1 per il corso di laurea in Chimica Applicata
5 Dicembre 2017

(1) Si determinino tutte le soluzioni esistenti nel campo complesso della seguente equazione:
$$z^8 - z^4 - 2 = 0 \ .$$

(2) Si calcolino i seguenti limiti, avendo cura di motivare adeguatamente i passaggi, laddove è necessario.

$$(2a) \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{Sh}(x) - x}{\Big(1 - \cos\left(\sqrt{x}\right)\Big)\Big(\sqrt{1+x^2} - 1\Big)} \quad ,$$

dove si ricorda la definizione del seno iperbolico: $\mathrm{Sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2\,$.

$$(2b) \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{\big[\log(1+x)\big]\ \log(x)} \quad .$$

(3) Si determinino i valori dei parametri c e α tali che vale la seguente relazione:
$$\sqrt{n^{3/2}+1} - \sqrt{n^{3/2}-1} \sim \frac{c}{n^\alpha} \qquad \text{per } n \to \infty\,.$$

(4) Si verifichi che il grafico della funzione $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbf{R}$, che è definita come segue:
$$f(x) = \mathrm{Sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \ ,$$
interseca due sole volte l'asse delle ascisse in tutto il suo dominio.

(4a) Inoltre, facoltativamente, si determini un intervallo $[\alpha, \beta]$ tale che la sola soluzione *positiva* $\bar{x}$ dell'equazione $f(x) = 0$ appartenga a (α, β) e la sua ampiezza non sia superiore a $1/10$ (cioè $\beta - \alpha \leq 0.1$).