Prima prova di esonero dagli esami scritti di Calcolo I per il corso di laurea in Scienze dei Materiali 2 Dicembre 2015

(1) Si determinino tutte le soluzioni esistenti nel campo complesso della seguente equazione:

$$z^5 + \left(1 + \mathbf{i}\sqrt{3}\right) |z| = 0 \ ,$$

dove i simboli $\mathbf{i}$ e $|z|$ denotano, rispettivamente, l'unità immaginaria e il modulo del numero complesso z, in accordo con la notazione usuale.

(2) Si detemini il carattere di ciascuna delle seguenti tre serie, avendo cura di motivare adeguatamente le risposte.

(2a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n^3} \left[\mathrm{Sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right] \ ,$$

dove si ricorda che il seno [coseno] iperbolico è definito in modo tale che $\mathrm{Sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ $\left[\text{corrispondentemente, } \mathrm{Ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2\,\right]$.

(2b)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n c_n}{4^n} x^n \ ,$$

dove il parametro $x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{4\}$ e la successione $\{c_n\}$ è definita ricorsivamente in modo tale che $c_0 = 1$ e $c_n = \big[1 - 1/(2n)\big] c_{n-1}$ $\forall\ n \geq 1$. Facoltativamente, si discuta la convergenza della serie anche nel caso (delicato) con $x = 4$.

(2c)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \ .$$

(3) Si calcolino i seguenti tre limiti, avendo cura di motivare adeguatamente i passaggi, laddove è necessario.

(3a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right) \cdot \left(\mathrm{Ch}(x) - 1\right)}{\left(\sin^2 x\right) \cdot \log\left(1+x\right)} \ .$$

(3b)
$$\lim_{x\to +\infty} \big[\mathrm{Sh}(x)\big]^{\sqrt{x^2+1}/(x^2 \log x)} \ .$$

(3c)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(x^{2x} - 1\right) \log x}{x^4 - 2x^2 + 1} \ .$$