Prima prova di esonero dagli esami scritti di Calcolo I
per il corso di laurea in Scienze dei Materiali
9 Dicembre 2014

(1) Si determinino tutte le soluzioni esistenti nel campo complesso della seguente equazione:

$$8z^6 - 63z^3 - 8 = 0$$

(2) Si detemini il carattere di ciascuna delle seguenti tre serie, avendo cura di motivare adeguatamente le risposte.

(2a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-1/n} - 1 - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\mathrm{Ch}\left(\frac{1}{n}\right)} \ ,$$

dove si ricorda che il coseno iperbolico è definito in modo tale che $\mathrm{Ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$.

(2b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right] \ .$$

(2c)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \, \frac{n^8 + 4n^7}{e^n}\right] \ .$$

Nel caso in cui la serie riportata in formula (2c) sia convergente a un valore reale $\sigma \in \mathbf{R}$, allora si descriva la procedura che consente di calcolare il minimo valore N che verifica la disuguaglianza

(2$c^\star$)
$$\left|\sigma - \sum_{n=0}^{N} \left[(-1)^n \, \frac{n^8 + 4n^7}{e^n}\right]\right| < 0.01 \ ;$$

inoltre, facoltativamente, si determini esplicitamente tale valore di N, grazie all'aiuto di una macchina calcolatrice.

(3) Si calcolino i seguenti tre limiti, avendo cura di motivare adeguatamente i passaggi, laddove è necessario.

(3a)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^4 \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] \left(1 - e^{-4/x^3}\right)} \ .$$

(3b)
$$\lim_{x\to1^+} e^{\frac{1}{x-1}} \log x \ .$$

(3c)
$$\lim_{x\to0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}\right)^{1/x^2} \ .$$