Seconda prova di esonero dagli esami scritti di Calcolo 1 per il corso di laurea in Scienze dei Materiali e di Analisi 1 per il corso di laurea in Chimica Applicata
11 Gennaio 2018

(1A) Si consideri la famiglia di funzioni f_a tale che

$$f_a(x) = x\, e^{\frac{1}{x-a}} \ ,$$

dove il parametro reale $a > 1$. Si determini il solo valore $\bar{a}$ tale che esiste un punto stazionario la cui ascissa ha il *doppio* del valore dell'unico numero reale che *non* appartiene al dominio della funzione $f_{\bar{a}}(x)$.

(1B) Si studi il grafico della funzione $f_{\bar{a}}(x)$, dove il valore di $\bar{a}$ è fissato così come richiesto dal testo dell'esercizio (1A).

(2A) Si calcoli il valore $F(M)$, per un qualsiasi numero reale $M > 2$, del seguente integrale definito:

$$F(M) = \int_2^M \mathrm{d}x\, \frac{2x^2}{x^4 - 1} \ .$$

(2B) Si discuta la convergenza sull'intervallo illimitato $[2, +\infty)$ dell'integrale proposto nell'esercizio precedente, calcolando

$$\lim_{M\to\infty} F(M)$$

e / o applicando opportunamente i criteri di (non) integrabilità su intervalli illimitati alla funzione integranda $f(x) = 2x^2/\big(x^4 - 1\big)$.

(3) Si discuta la convergenza del seguente integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\, \cos x}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \ .$$

applicando opportunamente i criteri di (non) integrabilità su di un intervallo illimitato.