Seconda prova di esonero dagli esami scritti di Calcolo I
per il corso di laurea in Scienze dei Materiali
12 Gennaio 2016

(1A) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_a(x) = -\frac{1}{x} + \frac{a}{x^3} - \frac{3}{2\,x^4} \ ,$$

dove il parametro $a \in \mathbf{R}$. Si determini il valore $\bar{a}$ tale che la funzione $f_{\bar{a}}$ abbia un punto stazionario in $x = -3$.

(1B) Si studi il grafico della funzione $f_{\bar{a}}(x)$ tale che il valore di $\bar{a}$ è fissato così come richiesto dal testo dell'esercizio (1A).
Durante lo studio del grafico, la discussione della concavità / convessità della funzione $f_{\bar{a}}$ *deve essere omessa.*

(2A) Si riconsideri la famiglia di funzioni che è già stata introdotta nel testo del precedente esercizio (1A), cioè $f_a(x) = -1/x + a/x^3 - 3/(2\,x^4)$, dove $a \in \mathbf{R}$. Si determini ora il valore $\bar{a}$ tale che l'equazione $f'_{\bar{a}}(x) = 0$ abbia una radice di molteplicità doppia in un punto stazionario $x = b$.

(2B) Senza effettuare il calcolo della derivata seconda, si verifichi che il punto $x = b$ è proprio un punto di flesso a tangente orizzontale per il grafico della funzione $f_{\bar{a}}(x)$, tale che il valore di $\bar{a}$ è fissato così come richiesto dal testo dell'esercizio (2A).
Si tenga presente che lo studio del grafico non è richiesto e neppure è necessario, al fine di risolvere l'esercizio.

(3) Si calcoli il valore del seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x - x^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}} \ .$$

(4) Si discuta se il cosiddetto integrale di Fresnel, cioè $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, \sin x^2$, è convergente oppure no.
A questo scopo, è opportuno discutere l'esistenza del seguente limite:

$$\lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t \ ,$$

utilizzando anche i criteri di integrabilità.