

# SISTEMI HAMILTONIANI

CARLANGEOLO LIVERANI

Questa nota contiene un condensato estremo della teoria delle equazioni di Hamilton. Il suo proposito è quello di introdurre alla teoria e fornire alcuni fatti basilari. Per uno sviluppo organico e completo di questo argomento si consulti un libro di Meccanica (due ottimi esempi sono [2], più fisico ed intuitivo, e [1] più matematico e sofisticato). In particolare, nel seguito considererò sempre ODE su  $\mathbb{R}^d$  sebbene la teoria naturale sia su varietà.

## 1. LAGRANGIANE

Si ricordi dal corso di Meccanica che per Lagrangiana si intende una funzione di due variabili  $\mathcal{L}(z, y)$ ,  $z, y \in \mathbb{R}^d$  che determina le equazioni del moto per un sistema meccanico in base alla seguente formula

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(q, \dot{q}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(q, \dot{q}) = 0$$

La forma più comune di Lagrangiana è data da una funzione del tipo

$$\mathcal{L}(z, y) = \frac{1}{2} \langle y, My \rangle + W(z)$$

dove  $M$  è una matrice  $d \times d$  simmetrica e definita positiva<sup>1</sup> e  $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ . In questo caso le equazioni del moto si scrivono come<sup>2</sup>

$$M\ddot{q} = \nabla W(q).$$

In questo caso è naturale riscrivere le equazioni come un sistema di equazioni del primo ordine introducendo la variabile  $p = M\dot{q}$ . Si ottiene così il sistema

$$\begin{aligned}\dot{q} &= M^{-1}p \\ \dot{p} &= \nabla W(q).\end{aligned}$$

Abbiamo dunque una equazione del primo ordine su  $\mathbb{R}^{2d}$  con campo vettoriale  $V(q, p) = (M^{-1}p, \nabla W(q))$ . Sia  $\phi_t$  il flusso associato alle equazioni differenziali di cui sopra. Mostriamo che tale flusso ha molte interessanti proprietà che a prima vista non sono visibili.

Come primo fatto notiamo che  $\operatorname{div} V = 0$ .

---

*Date:* November 23, 2012.

<sup>1</sup> Ovvero  $\langle y, My \rangle > 0$  per ogni  $y \neq 0$ .

<sup>2</sup> Queste non sono altro che le ben note equazioni di Newton.

## 2. FLUSSI CHE PRESERVANO IL VOLUME

Si consideri una equazione differenziale del primo ordine

$$(2.1) \quad \dot{x} = V(x)$$

**Teorema 2.1** (Liouville). *Se  $\operatorname{div} V = 0$  allora il flusso associato a (2.1) preserva il volume.*

*Proof.* Data una regione regolare  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , la sua immagine è al tempo  $t$  è data da  $\phi_t(\Omega)$  e il suo volume da

$$\operatorname{Vol}(\phi_t(\Omega)) = \int_{\phi_t(\Omega)} dx = \int_{\Omega} |\det(D\phi_t(x))| dx = \int_{\Omega} |\det(\Xi(t, x))| dx.$$

dove  $\Xi(t, x)$  è l'unica soluzione di

$$(2.2) \quad \dot{\Xi}(t, x) = DV(x(t))\Xi(t, x)$$

con  $x(t) = \phi_t(x)$ . Dalla struttura di gruppo segue che  $\Xi(t+s, x) = \Xi(s, \phi_t(x))\Xi(t, x)$ .

Dunque

$$\frac{d}{dt} \det(\Xi(t, x)) = \det(\Xi(t, x)) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(\Xi(h, \phi_t(x))) - 1}{|h|}$$

**Esercizio 1.** *Si dimostri che se  $A \in GL(d, \mathbb{R})$  è sufficientemente piccola allora<sup>3</sup>*

$$\det(\mathbf{1} + A) = e^{\operatorname{Tr} \ln(\mathbf{1} + A)}$$

Poichè integrando (2.2) si ha  $\Xi(h, \phi_t(x)) = \mathbf{1} + DV \circ \phi_t h + \mathcal{O}(h^2)$ , abbiamo

$$\det(\Xi(h, \phi_t(x))) = 1 + \operatorname{Tr} DV \circ \phi_t h + \mathcal{O}(h^2).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(\Xi(t, x)) &= [\operatorname{Tr} DV] \circ \phi_t \cdot \det(\Xi(t, x)) \\ \det(\Xi(0, x)) &= 1. \end{aligned}$$

Poichè l'ipotesi del Teorema è equivalente a  $\operatorname{Tr} DV = 0$  segue  $\det(\Xi(t, x)) = 1$  e  $\operatorname{Vol}(\phi_t(\Omega)) = \operatorname{Vol}(\Omega)$ , come annunciato.  $\square$

## 3. HAMILTONIANE

La riduzione ad un sistema del primo ordine fatta nella sezione 1 può essere fatta in una generalità molto maggiore. Per esempio nel caso in cui Lagrangiana è convessa nella variabile  $y$ .<sup>4</sup>

**Esercizio 2.** *Si mostri che se  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , allora  $f$  è convessa se e solo se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  è una matrice definita positiva.<sup>5</sup> Si dia una condizione per la stretta convessità.*

<sup>3</sup>La piccolezza di  $A$  serve a garantire che il logaritmo sia ben definito dalla usuale espansione in serie

$$\ln(\mathbf{1} + A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n.$$

Per verificare l'uguaglianza ci si può mettere, per esempio, in forma normale di Jordan.

<sup>4</sup>Una funzione  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  si dice convessa se per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^d$  e  $t \in [0, 1]$  si ha  $f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$ , (se la disuguaglianza è ovunque stretta, allora la funzione si dice strettamente convessa).

<sup>5</sup>Una matrice  $A \in GL(\mathbb{R}, d)$  si dice definita positiva se  $A^T = A$  e  $\langle v, Av \rangle \geq 0$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^d$ .

**Lemma 3.1.** *Se una funzione  $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  convesso,<sup>6</sup> è convessa e limitata allora è continua.*

*Proof.* Si cominci col dimostrare che il caso generale può essere ridotto al caso uno dimensionale ( $d = 1$ ).

Quindi si dimostri che se  $\tilde{h} \geq h \geq 0$  allora<sup>7</sup>

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x+\tilde{h}) - f(x)}{\tilde{h}}$$

Dunque se  $f$  è crescente e  $A$  è il suo massimo si ha

$$0 \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x+1) - f(x)}{1} \leq 2A$$

Per trattare il caso generale si dimostri prima che per  $x < y$ , e  $y - x > h > 0$  si ha

$$f(y+h) - f(y) \geq f(x+h) - f(x)$$

e si usi tale disuguaglianza per concludere.  $\square$

Data una funzione  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  si definisca la sua *Trasformata di Legendre* come

$$(3.1) \quad f^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{ \langle x, y \rangle - f(y) \}$$

Si noti che  $f^*$  può assumere il valore  $+\infty$ .

**Esercizio 3.** *Si mostri che  $f^*$  è convessa.*

**Esercizio 4.** *Si mostri che  $f^{**} \leq f$ .*

**Esercizio 5.** *Si mostri che se  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  è strettamente convessa allora la funzione  $h(y) := \frac{\partial f}{\partial y}(y)$  è invertibile. Inoltre, detta  $g$  la funzione inversa di  $h$ , si ha*

$$f^*(x) = \langle x, g(x) \rangle - f \circ g(x).$$

**Esercizio 6.** *Si mostri che se  $f \in C^2$  è strettamente convessa allora  $f^{**} = f$ .*

**Esercizio 7.** *Si mostri che per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,  $\langle x, y \rangle \leq f^*(x) + f(y)$ , (disuguaglianza di Young).*

**Esercizio 8.** *Si calcoli la trasformata di Legendre delle seguenti funzioni di una variabile reale:  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = x \ln x$ ,  $f(x) = x^4$ . Si calcoli inoltre la trasformata di Legendre di  $f(x) = \langle x, Ax \rangle$  dove  $A$  è una matrice definita positiva.*

Tornando alle nostre motivazioni originali, data una funzione  $\mathcal{L}(x, y)$  strettamente convessa nella seconda variabile definiamo la funzione

$$H(p, q) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \langle p, y \rangle - \mathcal{L}(q, y),$$

la funzione  $H$  è detta *Hamiltoniana*. Se  $\mathcal{L} \in C^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$ , allora, dai precedenti esercizi si ha che per ogni  $q \in \mathbb{R}^d$  la funzione  $\Psi(q, \cdot) = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \cdot)}{\partial y}$  è invertibile come funzione di  $y$ , sia  $G(q, \cdot)$  la sua inversa, e si ha

$$H(p, q) = \langle p, G(q, p) \rangle - \mathcal{L}(q, G(q, p)).$$

<sup>6</sup>Un insieme  $D$  si dice convesso se per ogni  $x, y \in D$  e  $t \in [0, 1]$  si ha  $ty + (1-t)x \in D$ .

<sup>7</sup>Semplicemente si scriva  $s+h = (1-t)s + t(s+\tilde{h})$ ,  $t = h\tilde{h}^{-1}$  e si applichi la definizione di convessità.

**Lemma 3.2.** *Data una Lagrangiana  $\mathcal{L}$  e un moto  $q(t)$  si consideri la funzione  $p(t) = \frac{\partial \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{y}}$ . Le funzioni  $(q(t), p(t))$  sono soluzioni delle equazioni*

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

se e solo se  $q(t)$  soddisfa le equazioni di Lagrange.

*Proof.* Le equazioni di Lagrange si scrivono come  $\dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ . D'altro canto

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) &= \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial q} \right\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) &= G(q, p) + \left\langle p, \frac{\partial G}{\partial p} \right\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial p} = \dot{q}(t). \end{aligned}$$

Da cui il Lemma segue. □

**Remark 3.3.** *Le equazioni (3.2) sono dette equazioni di Hamilton.*

**Esercizio 9.** *Si mostri che se  $q(t), p(t)$  sono soluzione delle equazioni di Hamilton allora  $\frac{dH}{dt}(q(t), p(t)) = 0$ .*

**Esercizio 10.** *Si mostri che le equazioni di Hamilton soddisfano le ipotesi del Teorema di Liouville.*

#### 4. STRUTTURA SIMPLETTICA DELLE EQUAZIONI DI HAMILTON

Data la matrice  $2d \times 2d$  definita da

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

le equazioni di Hamilton si possono scrivere come<sup>8</sup>

$$(4.1) \quad \dot{x} = J \nabla H(x)$$

dove  $z = (q, p)$ . Si noti che  $J^2 = -\mathbf{1}$  e  $J^T = -J$ .<sup>9</sup> La matrice  $J$  gioca un ruolo fondamentale nella struttura Hamiltoniana. In particolare, si può definire la forma bilineare su  $\mathbb{R}^{2d}$

$$\omega(v, w) := \langle v, Jw \rangle.$$

La forma  $\omega$  si chiama *forma simplettica*. Una matrice  $A$  con la proprietà  $\omega(Av, Aw) = \omega(v, w)$ , per ogni  $v, w \in \mathbb{R}^{2d}$ , si dice *simplettica*. Una trasformazione  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d})$  tale che  $DF(x)$  è simplettica per ogni  $x \in \mathbb{R}^{2d}$  si dice *trasformazione simplettica*.

**Lemma 4.1.** *Per ogni  $t \in \mathbb{R}$  il flusso Hamiltoniano  $\phi_t$  è una trasformazione simplettica.*

<sup>8</sup>Il gradiente di una funzione  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  è dato dal vettore  $\nabla f := (\partial_{x_i} f)$ .

<sup>9</sup>Si noti la somiglianza col numero immaginario  $i$ , dove il trasposto prende il posto della coniugazione complessa, non si tratta di un caso!

*Proof.* Sia  $\Xi(x, t) = D\phi_t$ , allora

$$\dot{\Xi}(t, x) = JD^2H \circ \phi_t(x)$$

dunque, per ogni  $v, w \in \mathbb{R}^{2d}$ ,

$$\frac{d}{dt}\omega(\Xi v, \Xi w) = \omega(\dot{\Xi}v, \Xi w) + \omega(\Xi v, \dot{\Xi}w) = \langle JD^2Hv, Jw \rangle - \langle v, D^2Hw \rangle = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che  $D^2H$  è una matrice simmetrica.<sup>10</sup>  $\square$

**Lemma 4.2.** *L'insieme delle matrici simplettiche formano un gruppo (chiamato  $Sp(2d, \mathbb{R})$ ). Inoltre, se  $A \in Sp(2d, \mathbb{R})$  allora  $A^T \in Sp(2d, \mathbb{R})$ .*

*Proof.* Prima di tutto è si noti che una matrice è simplettica se e solo se  $A^T JA = J$ . Allora è banale verificare che  $\mathbf{1} \in Sp(2d, \mathbb{R})$ . Inoltre se  $A, B \in Sp(2d, \mathbb{R})$ , allora

$$(AB)^T JAB = B^T A^T JAB = J,$$

quindi  $AB \in Sp(2d, \mathbb{R})$ . Per altro  $A[-JA^T J] = \mathbf{1}$  mostra che  $A$  è invertibile e  $A^{-1} = -JA^T J$ , inoltre

$$(A^{-1})^T JA^{-1} = (-JA^T J)^T JA^{-1} = JAA^{-1} = J.$$

Finalmente, se  $A \in Sp(2d, \mathbb{R})$ , allora  $A^{-1}J(A^T)^{-1} = J$  che implica  $(A^T)^{-1} \in Sp(2d, \mathbb{R})$  e dunque  $A^T \in Sp(2d, \mathbb{R})$ .  $\square$

Si noti che  $\det(A)^2 = 1$ , infatti di più è vero.

**Lemma 4.3.** *Se  $A \in Sp(2d, \mathbb{R})$ , allora  $\det(A) = 1$ .*

*Proof.* Si scriva una matrice  $A$ ,  $2d \times 2d$ , come

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

dove  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  sono matrici  $d \times d$ . Un calcolo esplicito mostra che  $A \in Sp(2d, \mathbb{R})$  se e solo se

$$(4.2) \quad (\mathbf{a}^T \mathbf{c})^T = \mathbf{a}^T \mathbf{c}; \quad (\mathbf{b}^T \mathbf{d})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{d}; \quad \mathbf{a}^T \mathbf{d} - \mathbf{c}^T \mathbf{b} = \mathbf{1}.$$

Si noti che se  $d = 1$  l'ultima di tali equazioni significa  $\det A = 1$ . Per  $d > 1$  occorre un argomento più sofisticato.

Cominciamo con lo studiare il caso  $\det(\mathbf{d}) \neq 0$ . Notiamo che

$$(4.3) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{d}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^T \mathbf{a} & \mathbf{d}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

D'altro canto se moltiplichiamo le  $d + i$ -esime righe della matrice sulla destra per  $\mathbf{b}_{ik}$  e le sommiamo alla  $k$ -esima riga otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{d}^T \mathbf{a} & \mathbf{d}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \det \mathbf{d}.$$

Applicando il determinante a (4.3) si ha dunque  $\det \mathbf{d} \cdot \det A = \det \mathbf{d}$ , dunque  $\det A = 1$ .

Ci rimane da esaminare il caso  $\det \mathbf{d} = 0$ . Per studiare questo caso occorre notare che ci si può ricondurre al caso precedente moltiplicando la matrice per una matrice simplettica di cui si conosce il determinante. Lasciamo i dettagli al lettore ma come suggerimento si considerino due sottoinsiemi disgiunti,  $\alpha, \beta$ , di  $\{1, \dots, d\}$

<sup>10</sup>Ovviamente stiamo assumendo che  $H \in C^2$  e la simmetria segue dal Lemma di Schwartz.

tali che  $\alpha \cup \beta = \{1, \dots, d\}$  e una permutazione  $\sigma$  di  $\{1, \dots, d\}$  tale che  $\sigma^2 = id$  e si considerino le matrici

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in \alpha, j = \sigma(i) \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases} \quad Q_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in \beta, j = \sigma(i) \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases}.$$

Si verifichi che  $PQ^T = QP^T = 0$ ,  $PP^T + QQ^T = \mathbf{1}$  e che

$$\Pi = \begin{pmatrix} P & Q^T \\ Q & P^T \end{pmatrix}$$

è simplettica con determinante uno. Si studi quindi come sono fatti i blocchi della matrice (simplettica)  $\Pi A$  e si noti che le (4.2) implicano che le righe di  $\mathbf{b}, \mathbf{d}$  devono contenere un sottoinsieme di  $d$  righe linearmente indipendenti.  $\square$

## 5. TRASFORMAZIONI CANONICHE

Una trasformazione  $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d})$  si dice *canonica* per le Hamiltoniane  $H, K$  se per ogni soluzione  $q(t), p(t)$  delle equazioni di Hamilton con Hamiltoniana  $H$ , le funzioni  $(Q(t), P(t)) = F(q(t), p(t))$  soddisfano le equazioni di Hamilton con Hamiltoniana  $K$ .

Diciamo che una trasformazione  $F$  è *completamente canonica* se per ogni Hamiltoniana  $H$  è canonica per le Hamiltoniane  $H, H \circ F^{-1}$ .

**Lemma 5.1.** *Una trasformazione è completamente canonica se e solo se è simplettica.*

*Proof.* Si consideri la trasformazione invertibile  $\Xi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d})$ . Se poniamo  $\xi = \Xi(x)$  e consideriamo una soluzione  $x(t)$  delle (4.1) per qualche Hamiltoniana  $H$ , segue che le funzioni  $\xi(t) = \Xi(x(t))$  soddisfano

$$\dot{\xi}(t) = D\Xi(x(t))\dot{x}(t) = D\Xi(x(t))J\nabla H(x(t)).$$

Se la trasformazione è completamente canonica allora le equazioni del moto devono essere equazioni di Hamilton rispetto alla nuova Hamiltoniana  $K = H \circ \Xi^{-1}$ , dunque  $\nabla H = D\Xi^T \nabla K \circ \Xi$ . Quindi le equazioni di cui sopra si possono scrivere come

$$\dot{\xi}(t) = D\Xi(x(t))JD\Xi^T(x(t))\nabla K(\xi(t))$$

che hanno la struttura delle equazioni di Hamilton se e solo se  $D\Xi JD\Xi^T = J$ , cioè la trasformazione  $\Xi$  è simplettica.  $\square$

Si noti che non è affatto ovvio come costruire una trasformazione simplettica. Un aspetto molto interessante di questa teoria è che molte trasformazioni simplettiche possono essere costruite in modo sistematico attraverso le cosiddette *funzioni generatrici*.

Si consideri  $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$ , si designino le variabili in  $\mathbb{R}^{2d}$  come  $(q, P)$  dove  $(q, p)$  saranno le nostre vecchie variabili e  $(Q, P)$  quelle nuove ottenute attraverso la trasformazione simplettica che intendiamo costruire. Si considerino le relazioni

$$(5.1) \quad \begin{aligned} p &= \frac{\partial F(q, P)}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial F(q, P)}{\partial P}. \end{aligned}$$

La prima domanda è: sotto quali condizioni le (5.1) definiscono un cambio di coordinate  $\Xi(q, p) = (Q, P)$ ? Per rispondere basta applicare il teorema della funzione

implicita alle (5.1).<sup>11</sup> Segue che si ha (localmente) un cambio di coordinate se  $\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial P \partial q}$  è invertibile.

**Lemma 5.2.** *Se  $\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial P \partial q}$  è invertibile, allora le (5.1) definiscono (localmente) un cambio di coordinate simplettico.*

*Proof.* Il teorema della funzione implicita implica

$$\begin{aligned} D\Xi &= - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \\ \mathbf{1} & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 P} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 q} & \mathbf{1} \\ -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \left[ \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \right]^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \\ \mathbf{1} & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 P} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 q} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \\ \left[ \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \right]^{-1} & -\left[ \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \right]^{-1} \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 P} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 q} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ricordando che la matrice delle derivate seconde è simmetrica, si può direttamente verificare che  $D\Xi$  è dato dal prodotto di due matrici simplettiche e dunque è simplettico.  $\square$

**Esercizio 11.** *Si verifichi che  $D\Xi$  non è una matrice simplettica qualunque ma una con un blocco invertibile (quale?)*

## 6. USO DELLE TRASFORMAZIONI CANONICHE

L'utilità delle trasformazioni canoniche consiste nella possibilità di cambiare variabile e trasformare una equazione differenziale complessa in una più semplice. Questo può essere fatto in maniera sistematica attraverso l'equazione di Hamilton-Jacobi. Questa è una teoria molto sviluppata, qui ci limitiamo ad un semplice esempio. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$$

dove  $q, p \in \mathbb{R}$  e  $V$  è strettamente convessa (si tratta di un oscillatore anarmonico). Cerchiamo un cambio di coordinate in cui, chiamando  $(Q, P)$  le nuove coordinate, la nuova Hamiltoniana  $K(Q, P)$  non dipenda dalle  $Q$ . In fatti, in tal caso le equazione del moto sono

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} =: \omega(P) \\ \dot{P} &= 0. \end{aligned}$$

Ovvero le  $P$  sono integrali del moto e le  $Q$  evolvono come  $Q(t) = Q(0) + \omega(P)t$ . Poichè il moto avviene in un compatto, ne segue che l'orbita di  $Q$  deve essere periodica, ovvero avviene su di un cerchio.

Per trovare il cambio di coordinate voluto consideriamo la funzione generatrice  $F(q, P)$ . Dalle (5.1) segue che vogliamo

$$K(P) = H \left( q, \frac{\partial F}{\partial q} \right).$$

<sup>11</sup>Si consideri la funzione  $\Phi(q, p, Q, P) = (p - \frac{\partial F(q,P)}{\partial q}, Q - \frac{\partial F(q,P)}{\partial P})$ .

Ovvero, localmente,

$$F(q, P) = \int_{q_0}^q \sqrt{2(K(P) - V(s))} ds.$$

Lascio come esercizio al lettore il problema di definire la  $F$  globalmente ove possibile.

## 7. SISTEMI COMPLETAMENTE INTEGRABILI

Data una Hamiltoniana  $H$  sia  $(q(t), p(t))$  un moto associato. Allora, per ogni funzione  $I$ , si ha

$$\frac{dI(q(t), p(t))}{dt} = \frac{\partial I}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial I}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial I}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}.$$

È quindi naturale definire le *parentesi di Poisson* tra due funzione come

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} = \langle \nabla f, J \nabla g \rangle = L_{J \nabla g} f,$$

dove, dato un campo vettoriale  $v$  si ha che  $v \cdot \nabla h = \sum_i v_i \partial_{\xi_i} h = L_v h$  è la derivata di Lie. Chiameremo un campo vettoriale  $v$  Hamiltoniano se esiste una funzione  $f$  tale che  $v = J \nabla f$ . Usando questa notazione abbiamo

$$\frac{dI(q(t), p(t))}{dt} = \{I, H\}(q(t), p(t)).$$

Ne segue che se  $\{I, H\} = 0$  allora  $I$  è costante lungo i moti associati ad  $H$ . Una tale funzione si chiama *costante del moto*. Chiaramente  $H$  è una costante del moto (comunemente chiamata *energia*). Questo significa che gli insiemi di livello  $\Sigma_E = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{2d} : H(q, p) = E\}$  sono insiemi invarianti per il moto. Da ora in poi, per semplicità supporremo che tali insiemi siano compatti.

Poichè le Parentesi di Poisson sono antisimmetriche, ne segue che se consideriamo  $I$  come una Hamiltoniana allora  $H$  è costante lungo i moti di  $I$ . Che succede che abbiamo più costanti del moto  $\{I_i\}_{i=1}^n$ ? Per capirlo dobbiamo addentrarci un poco di più nell'algebra delle parentesi di Poisson.

**Lemma 7.1.** *Le funzioni  $C^\infty$  con le parentesi di Poisson formano una algebra di Lie.*<sup>12</sup>

*Proof.* L'unica cosa non ovvia è la uguaglianza di Jacobi. Si noti che

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= \langle \nabla f, J \nabla \langle \nabla g, J \nabla h \rangle \rangle \\ &= \langle J \nabla f, D^2 h J \nabla g \rangle - \langle J \nabla f, D^2 g J \nabla h \rangle. \end{aligned}$$

Il risultato si ottiene quindi da un calcolo esplicito. □

Ne segue che per ogni tripla di funzioni  $h, g, f$  si ha

$$\begin{aligned} L_{J \nabla \{f, g\}} h &= \{h, \{f, g\}\} = -\{g, \{h, f\}\} - \{f, \{g, h\}\} = \{\{h, f\}, g\} - \{\{h, g\}, f\} \\ &= L_{J \nabla g} L_{J \nabla f} h - L_{J \nabla f} L_{J \nabla g} h = L_{[J \nabla g, J \nabla f]} h. \end{aligned}$$

Da cui segue

$$J \nabla \{f, g\} = [J \nabla g, J \nabla f].$$

In altre parole se due campi vettoriali sono Hamiltoniani, allora il loro commutatore è anche esso un campo vettoriale Hamiltoniano e l'Hamiltoniana è data dalle

<sup>12</sup>Uno spazio vettoriale con una operazione bilineare  $[\cdot, \cdot]$  è un'algebra di Lie se  $[x, x] = 0$  per ogni  $x$  e se, per ogni  $x, y, z$ ,  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  (identità di Jacobi).

parentesi di Poisson delle Hamiltoniane. Ovvero, poichè i campi vettoriali lisci formano un'algebra di Lie dove l'operazione biliare è data dal commutatore, *i campi vettoriali Hamiltoniani formano una sotto algebra di Lie.*

In particolare questo significa che i campi vettoriali determinati dalle  $I_i$  commutano con quello Hamiltoniano. Inoltre si ha che

$$\{\{I_i, I_j\}, H\} = -\{\{I_j, H\}, I_i\} - \{\{H, I_i\}, I_j\} = 0,$$

ovvero la parentesi di Poisson di due costanti del moto è una costante del moto. Si possono quindi continuare a produrre nuove costanti del moto a meno che queste non siano in involuzione (ovvero  $\{I_i, I_j\} = 0$ ). Ovviamente tali costanti del moto saranno veramente nuove solo se i campi vettoriali associati sono indipendenti da quelli precedenti.

Un caso di particolare interesse è quando ci sono  $d - 1$  costanti del moto in involuzione e i cui campi vettoriali associati linearmente indipendenti ad ogni punto. Un sistema siffatto si chiama *completamente integrabile*. Consideriamo il caso in cui le superfici ad energia costante sono compatte.

**Lemma 7.2.** *Per ogni  $E$ ,  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{d-1}$ , la superficie  $M_{E,\alpha} = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{2d} : H(q, p) = E, I_i(q, p) = \alpha_i\}$  o è vuota oppure è diffeomorfa a  $\mathbb{T}^d$ .*

*Proof.* Per la dimostrazione completa si veda [1, Sezione 10]. Qui notiamo solo che la superficie è invariante per i flussi associati a  $H, I_i$ . Tali flussi commutano e quindi, localmente, possono essere usati come coordinate sulla superficie (che è quindi  $d$ -dimensionale). Se uno usa queste coordinate globalmente allora definisce un ricoprimento della superficie il cui dominio fondamentale è un ipercubo. Un poco di topologia mostra che allora la superficie deve essere un toro.  $\square$

## REFERENCES

- [1] Mathematical Methods of Classical mechanics, V.I. Arnold, Springer.
- [2] Fisica Teorica, Meccanica, Landau, Lifshitz.

CARLANGELO LIVERANI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.

*E-mail address:* liverani@mat.uniroma2.it