Fisica Matematica I

Secondo esonero, 28-05-25

Cognome......................... Nome.........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 15 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri un disco omogeno, di raggio r e densità uno, in un piano verticale col centro bloccato all'origine delle coordinate e un punto P_1 di massa uno vincolato a muoversi sull'asse verticale. Inoltre ci sono due punti A e B del disco agli estremi opposti di un diametro. In B c'è un punto di massa uno fissato al disco e il punto A è collegato al punto P_1 da una molla di constante k e lunghezza a riposo nulla. Si scriva la Lagrangiana del sistema e si discutano i punti di equlibrio e la loro stabilità.

2. Si consideri un punto che si muove sul piano in modo tale che quando si trova nel punto (x, y) ha velocità $f(x, y) > 0$. Supponendo che il moto minimizzi il tempo impiegato per andare dal punto $(0, 0)$ al punto $(1, 1)$, e che $\dot{x} > 0$, si trovino le equazioni che descrivono la forma della traiettoria.

Soluzione

1. Prima di tutto dobbiamo scegliere le coordiante. Il moto del disco è descritto da un angolo θ che può essere scelto in modo che il punto A ha coordinate $r(\cos\theta, \sin\theta)$ e B ha coordiante $-r(\cos\theta, \sin\theta)$. Mentre P_1 ha coordinate $(0, y)$. Il momento di inerzia del disco è dato da $I = \frac{1}{2}Mr^2$ e poichè la densità è uno si ha $M = \pi r^2$. Inoltre la lunghezza della molla è $\|(0, y) - r(\cos\theta, \sin\theta)\| = \sqrt{r^2 + y^2 - 2yr\sin\theta}$. Dunque la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\pi r^4\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{r}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{k}{2}(r^2 + y^2 - 2yr\sin\theta) + gr\sin\theta - gy.$$

I punti di equilibrio sono dati da $\nabla V = 0$, che si può scrivere come

$$(ky + g)\cos\theta = 0$$
$$ky - kr\sin\theta + g = 0$$

La prima equazione ha soluzione solo per $y = -g/k$ o per $\theta = \pm\pi/2$. Nel primo caso la seconda equazione diventa $\sin\theta = 0$. Nel secondo caso si ha $y = \pm r - \frac{g}{k}$. Calcoliamo la derivata seconda.

$$D^2V = \begin{pmatrix} r(ky + g)\sin\theta & -rk\cos\theta \\ -rk\cos\theta & k \end{pmatrix}$$

Se $\theta = \pm\pi/2$ si ha

$$D^2V(\pm\pi/2, \pm r - \frac{g}{k}) = \begin{pmatrix} kr^2 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

ovvero i punti di equilibrio sono stabili. D'altro canto

$$D^2V((1 \pm 1)\pi/2, -g/k) = \begin{pmatrix} 0 & \mp rk \\ \mp rk & k \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\frac{k}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4r^2})$, ovvero, essendo sempre un autovalore negativo, si ha un punto di equlibrio instabile.

2. Poichè $\dot{x} > 0$ possiamo descrivere la traiettoria come $y(x)$. Da cui possiamo scrivere la velocità come $f(x, y)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + y'(x)^2\dot{x}^2$ dunque

$$\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{f(x, y)}\dot{x} = 1$$

Integrando e chiamando T il tempo impiegato, si ha

$$T = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{f(x, y)}dx.$$

Ne segue che la minimizzazione del tempo è lo stesso problema che trovare il moto rispetto alla Lagrangiana $\mathcal{L}(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{f(x,y)}$ (dove il tempo T gioca il ruolo della azione) dunque la forma della traiettoria deve soddisfare l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{f(x, y)\sqrt{1 + y'(x)^2}} + \frac{\partial_y f(x, y)\sqrt{1 + y'(x)^2}}{f(x, y)^2} = 0.$$

Ovviamente il punto di questo esercizio è che avete imparato a minimizzare un certo tipo di funzoni definite su uno spazio di traiettorie e ora potete usare quasta conoscenza in casi diversi, che poco hanno a che fare con le equazioni della meccanica.