Fisica Matematica I

Primo esonero, 17-04-24

Cognome......................... Nome.........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 15 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x - xy \\ &\dot{y} = -y + xy \\ &x(0) > 0, \; y(0) > 0. \end{aligned}$$

   Se ne studino le soluzioni, in particolare si dica se esistono soluzioni periodiche.
   (suggerimento: una funzione interessante è $H(x, y) = x + y - \ln xy$)

2. Si consideri il potenziale $U_\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{4}x^4$ e si dica se per aumentare il periodo del moto di una particella di massa 1 e condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \sqrt{2}$ occorre, per piccoli λ, prendere λ crescente o decrescente.

Soluzione

1. Per vostra informazione si tratta di un esempio di equazione di Lotka–Volterra che modella (abbastanza rozzamente) l'evoluzione di due popolazioni (prede e predatori).

   I punti di equilibrio sono $(0,0)$ e $(1,1)$, inoltre

$$\frac{d}{dt}H(x,y) = \dot{x} + \dot{y} - \frac{\dot{x}y + \dot{y}x}{xy} = x - y - 1 + y + 1 - x = 0.$$

   Studiamo un attimo la funzione H: $\partial_x H = x - \frac{1}{x}$, $\partial_y H = y - \frac{1}{y}$, $\partial_x^2 H = 1 + \frac{1}{x^2}$, $\partial_y^2 H = 1 + \frac{1}{y^2}$, $\partial_x \partial_y H = 0$. Dunque H è strettamente convessa, inoltre, nel primo quadrante, tende all'infinito per x o y che tendono a zero, oppure per (x,y) che tende all'infinito. Ne segue che $(1,1)$ è l'unico minimo della funzione, che infatti corrisponde al punto stazionario $(1,1)$. Inoltre, per le condizioni iniziali considerate, $H(x(t), y(t)) = H(x(0), y(0)) =: H_0 \geqslant H(1,1) = 2$. Ne segue che se il moto comincia nel primo quadrante rimane sempre nel primo quandrante ed è limitato. Poichè, ad ogni punto, o $\partial_x H = x - \frac{1}{x} \neq 0$ o $\partial_y H = y - \frac{1}{y} \neq 0$, per il teorema della funzione implicita $H(x,y) - H_0 = 0$ definisce localmente una curva. Per altro, essendo H continua nel primo quadrante, $K := \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y) = H_0\}$ è un insieme chiuso e limitato, quindi esiste un ricoprimento finito $\{U_i\}$ tale che, per ogni i, $K \bigcap U_i$ consiste di una curva. Ne segue che possiamo seguire la curva da un aperto all'altro e siccome il ricoprimento è finito la curva deve essere chiusa. Quindi tutte le soluzioni sono periodiche.

2. Si noti che l'energia del moto $E = \frac{1}{2}\dot{x}(0)^2 + V_\lambda(x(0)) = 1$. Dunque il moto avviene lungo le soluzioni della equazione $V_\lambda(x) = 1$, ovvero $x_\pm(\lambda) = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{\lambda}}$. Quindi, detto $T(\lambda)$ il periodo del moto

$$T(\lambda) = 2\int_{x_-(\lambda)}^{x_+(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4}x^4)}}dx = 4\int_0^{x_+(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4}x^4)}}dx.$$

   D'altro canto

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4}x^4 &= \frac{1}{2}x_+^2 + \frac{\lambda}{4}x_+^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4}x^4 \\ &= (x_+ - x)\left[\frac{1}{2}(x_+ + x) + \frac{\lambda}{4}(x_+^3 + x_+^2 x + x_+ x^2 + x^3)\right] \end{aligned}$$

   È quindi conveniente introdurre la variabile $x = x_+\xi$ che permette di scrivere

$$T(\lambda) = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-\xi)\left[(1+\xi) + \frac{\lambda x_+(\lambda)^2}{2}(\xi^3 + \xi^2 + \xi + 1)\right]}}d\xi$$

   Ponendo $\xi = \eta^2 + 1$ e $p(\eta) = \frac{1}{2}[(1+\eta^2)^3 + (1+\eta^2)^2 + (1+\eta^2) + 1]$ otteniamo

$$T(\lambda) = 8\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 + \eta^2 + \lambda x_+(\lambda)^2 p(\eta)}}d\eta.$$

   Poichè l'integrando è differenziabile possiamo ora calcolare $\frac{d}{d\lambda}T(\lambda)|_{\lambda=0} = T'(0)$.

$$T'(\lambda) = -4\int_0^1 \left[2 + \eta^2 + \lambda x_+(\lambda)^2 p(\eta)\right]^{-\frac{3}{2}} \left[x_+(\lambda) + \lambda\frac{d}{d\lambda}x_+(\lambda)\right] d\eta.$$

Nota che $x_+(\lambda) = \sqrt{2 - 4\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)} = \sqrt{2}(1 - \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2))$. Da cui segue $x_+(0) = \sqrt{2}$, $x'_+(0) = -\sqrt{2}$ e

$$T'(0) = -4\sqrt{2} \int_0^1 \left[2 + \eta^2\right]^{-\frac{3}{2}} d\eta < 0,$$

ne segue che per aumentare il periodo occorre prendere λ decrescente.

In alternativa, si può cercare di fare una stima più rozza, ma sufficiente a rispondere alla domanda. Si noti che, per $\lambda \leqslant 0$ piccoli, $x_+(\lambda) = \sqrt{2 - 4\lambda + cO(\lambda^2)} \leqslant \sqrt{2}$ e quindi, per $|x| \leqslant x_+(\lambda)$, si ha $x^4 \leqslant 2x^2$, da cui

$$T(\lambda) \geqslant 4 \int_0^{x_+(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2(1 - \frac{1}{2}(1+\lambda)x^2)}} dx.$$

Notiamo che il denominatore si annulla per $\tilde{x}_+(\lambda) := \sqrt{\frac{2}{1-\lambda}} \leqslant x_+(\lambda)$ e quindi abbiamo

$$T(\lambda) \geqslant 4 \int_0^{\tilde{x}_+(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2(1 - \frac{1}{2}(1+\lambda)x^2)}} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\lambda}}$$

che infatti cresce per λ negativi.