# Alcuni esercizi

Carlangelo Liverani

March 20, 2025

**Esercizio 0.0.1.** *Data una particella di massa unitaria che si muove sotto l'influenza del potenziale* $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{a^2}{2}y^2$*,* $x, y \in \mathbb{R}$*, con condizioni iniziali* $x(0) = y(0) = 1$*,* $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$*. Si dica per quali* $a \neq 0$ *la traiettoria è periodica.*

**Soluzione dell'esercizio.** Le equazioni del moto sono

$$\ddot{x} = -x$$
$$\ddot{y} = -a^2 y$$

da cui si ha $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \cos at$. La traiettoria è periodica se esiste un tempo $T$ tale che $x(T) = y(T) = 1$ e $\dot{x}(T) = \dot{y}(T) = 0$. Questo accade solo per $T = 2\pi n$ e, contemporaneamente $T = \frac{2\pi}{a}m$. Ovvero se $a = \frac{m}{n}$, quindi $a \in \mathbb{Q}$.

**Esercizio 0.0.2.** *Un punto materiale di massa* $m$ *si muove sulla retta soggetto a una forza di potenziale* $V(x) = x^2/2 + x^3/3$*. Si dimostri che esistono orbite periodiche in cui il valore medio (rispetto al tempo) della posizione non è nullo.*

**Soluzione dell'esercizio.** I valore medio della posizione è dato $\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$, dove $T$ è il periodo. Il potenziale ha un punto di equilibrio instabile in $-1$ dove vale $1/6$ e uno stabile in zero. Esistono orbite periodiche per tutti i valori dell'energia minori di $1/6$. Ne segue che per energie $E = 1/6 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il punto spende la maggior parte del suo tempo vicino a $-1$ e quindi il valore medio può essere vicino a $-1$ quanto si vuole.

**Esercizio 0.0.3.** *Si consideri il moto unidimensionale* $x(t)$ *di una particella di massa* $1$ *sotto l'azione del potenziale* $V(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$*. Si determino tutte le condizioni iniziali per cui il moto è limitato per tutti i tempi. Si determino tutte le condizioni iniziali per cui il moto è limitato per tutti i tempi positivi.*

**Soluzione dell'esercizio.** Si noti che $V'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$. Dunque il potenziale ha un puto di equilibrio per $x = 1$. Dunque la condizione iniziale $x_0 = 1, v_0 = 0$ da luogo ad un moto limitato per tutti i tempi. Il solo modo in cui un moto può essere limitato per tempi positivi è se tende asintoticamente a 1. Questo è possibile solo se ha energia $V(1) = \frac{1}{3}$. Siccome $V$ è crescente questo può accadere solo se $x_0 < 1$. In tal caso si ha che se $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3} - 2V(x_0)}$ il moto è limitato e $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$. Si noti che per tempi negativi il moto esplode all'infinito in un tempo finito e dunque è ben lungi dall'essere limitato.

**Esercizio 0.0.4.** *Dato il potenziale* $V(x) = -x^3 + 3x$ *si consideri il moto determinato da*

$$\ddot{x} = -V'(x) - \frac{3}{4}\dot{x}$$
$$x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 2\sqrt{2}.$$

*si dica*

*1. se il moto è limitato;*

*2. per quale intervallo di tempo il moto è ben definito.*

**Soluzione dell'esercizio.** Per comodità poniamo $\lambda = \frac{3}{4}$. Detta $E$ l'energia, allora

$$\dot{E} = -\lambda \dot{x}^2 = -\lambda \sqrt{2(E - V(x))}\dot{x}, \tag{0.0.1}$$

fino al tempo in cui $\dot{x} = 0$. Integrando si ha (visto che $\dot{x} > 0$ e quindi si può usare la posizione come variable indipendente)

$$E(x) = 4 - \lambda \int_0^x \sqrt{2(E(y) - V(y))}dy.$$

La particella rimane intrappolata solo se l'energia scende sotto $2 = V(1)$ che è il massimo del potenziale per $x \geq 0$. Sia allora $x_* \in [0, 1]$, se esiste, il primo punto in cui $E(x) = 2$, altrimenti poniamo $x_* = 1$. Allora

$$E(x_*) = 4 - \lambda \int_0^{x_*} \sqrt{2(E(y) - V(y))}dy.$$

Vediamo se le stime banali ci dicono qualcosa: prima di tutto $E(x) \leq 4$ e $V(x) \geq 0$ quindi

$$E(x_*) \geq 4 - \frac{4}{3}\int_0^1 \sqrt{8}dy < 2$$

e non possiamo concludere alcunchè. D'altro canto, per definizione $E(x) \geq 2$ e $V(x) \leq 3x$ e quindi, supponendo $x_* \geq \frac{2}{3}$,

$$\begin{aligned} E(x_*) &\leq 4 - \frac{4}{3}\int_0^{\min\{\frac{2}{3}, x_*\}} \sqrt{2(2-3x)}dy = 4 + \frac{8\sqrt{2}}{27}\left[\left(2 - 3(\frac{2}{3})\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right] \\ &\leq 4 - \frac{32}{27} > 2 \end{aligned}$$

e nuovamente non possiamo concludere nulla. Occorre quindi fare delle stime più accurate. Tuttavia dalle stime precedenti sembra più ragionevole aspettarsi che la particella superi il massimo del potenziale. Proviamo quindi a fare una stima dal basso dell'energia più accurata. Per l'energia usiamo la stessa stima di prima, dunque

$$E(x_*) \geq 4 - \lambda \int_0^{x_*} \sqrt{8 - 2V(y)}dy.$$

Cerchiamo invece di fare meglio per il potenziale. Si noti che, per ogni $x \in [0, 1]$, $V(x) \geq 2x$. Ne segue

$$\begin{aligned} E(x_*) &\geq 4 - \lambda \int_0^{x_*} \sqrt{8 - 4y}dy \geq 4 - \lambda \int_0^1 \sqrt{8 - 4y}dy \\ &= 4 - \frac{4\lambda}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 1\right] = 5 - 2^{\frac{3}{2}} > 2. \end{aligned}$$

Ne segue che il moto supera il massimo del potenziale e dunque non è limitato.

Per rispondere alla seconda domanda si noti che (0.0.1) implica che l'energia cala. Sia $\bar{x}$, se esiste, il primo posto in cui diventa negativa. Allora, per ogni $x \geq \bar{x}$,

$$\begin{aligned} E(x) &= -\lambda \int_{\bar{x}}^{x} \sqrt{2(E(y) - V(y))}dy \geq -\lambda \int_{\bar{x}}^{x} \sqrt{2(y^3 - 3y)}dy \geq -\lambda \int_{\bar{x}}^{x} \sqrt{2y^3}dy \\ &= -\lambda\sqrt{2}\frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}} - \bar{x}^{\frac{5}{2}}\right] \geq -\lambda\sqrt{2}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Ma questo implica che, per $x$ sufficientemente grande,

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = E(x) - V(x) \geq x^3 - 3x - \sqrt{2}\frac{3}{10}x^{\frac{5}{2}} \geq \frac{1}{2}x^3.$$

In altre parole

$$\dot{x} \geq x^{\frac{3}{2}}$$

che implica, per ogni $t > t_0$, con $t_0$ sufficientemente grande,

$$t - t_0 \leq \int_{t_0}^{t} x^{-\frac{3}{2}}(s)\dot{x}(s)ds = \int_{x(t_0)}^{x(t)} y^{-\frac{3}{2}}dy = 2x(t_0)^{-\frac{1}{2}} - 2x(t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ovvero,

$$x(t) \geq (x(t_0)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(t - t_0))^{-2}.$$

Questa disuguaglianza implica che il moto raggiunge l'infinito in un tempo finito e quindi esiste un $t_+ > 0$ tale che la soluzione è definita solo nell'intervallo $(0, t_+)$.

**Esercizio 0.0.5.** *Si consideri il moto unidimensionale $x(t)$ di una particella di massa 1 sotto l'azione del potenziale $V(x) = x^6$. Si mostri che*

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T \dot{x}(t)^2 dt = 6 \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T V(x(t))dt.$$

**Soluzione dell'esercizio.** Si noti che il moto è periodico e quindi i limiti esistono. Allora

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{x}(t)^2 dt &= x(T)\dot{x}(T) - x(0)\dot{x}(0) - \int_0^T x(t)\ddot{x}(t)dt \\ &= x(T)\dot{x}(T) - x(0)\dot{x}(0) - \int_0^T x(t)V'(x(t))dt \\ &= x(T)\dot{x}(T) - x(0)\dot{x}(0) - 6\int_0^T x(t)^6 dt \\ &= x(T)\dot{x}(T) - x(0)\dot{x}(0) - 6\int_0^T V(x(t))dt. \end{aligned}$$

Poichè $x(T)\dot{x}(T)$ è una quantità limitata, il risultato segue banalmente.[1]

[1] Per vostra informazione si tratta di un caso molto speciale del *teorema del viriale*.

**Esercizio 0.0.6.** *Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto all'equazione differenziale*

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx},$$

*dove l'energia potenziale $U(x)$ è definita da:*

$$U(x) = (x^2 - a^2)^2 \cdot \left(x^2 - (a+1)^2\right)$$

*per un parametro $a \in \mathbb{R}^+$. Si determinino tutte e sole le condizioni iniziali del tipo:*

$$(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, v_0),$$

*cui fanno seguito dei moti tali per cui esiste, finito, il*

$$\lim_{t\to\infty} x(t; x_0, v_0) \ .$$

*Infine, si determinino tutti i possibili valori di tale limite, quando esso è ben definito.*

**Soluzione dell'esercizio.** Prima di tutto dobbiamo studiare la forma del potenziale.

$$U'(x) = 2x(x^2-a^2)(2x^2-2(a+1)^2+x^2-a^2) = 2x(x^2-a^2)(3x^2-2(a+1)^2-a^2)$$

Dunque i punti critici del potenziale sono $0, \pm a$, e $\pm\sqrt{\frac{2}{3}(a+1)^2 + \frac{1}{3}a^2} =: \pm b$. Si noti che $b > a$. Chiaramente $x = 0$ è un minimo. Quindi $\pm a$ sono massimi e $\pm b$ minimi.

Per cominciare notiamo che se $x_*$ è il limite allora deve essere $U'(x_*) = 0$. Infatti se $U'(x_*) = \gamma \neq 0$, allora esiste un intorno $I \ni x_*$ per cui $\inf_{x\in I} |U'(x)| \geq \gamma/2$. D'altro canto esiste $t_* > 0$ tale che $x(t) \in I$ per ogni $t > t_*$. Ma in tal caso

$$x(t) = x(t_*) + \int_{t_*}^{t} ds \int_{t_*}^{s} d\tau \ddot{x}(\tau) = x(t_*) - \int_{t_*}^{t} ds \int_{t_*}^{s} d\tau U'(x(\tau)).$$

Dunque

$$|x(t) - x(t_*)| \geq \int_{t_*}^{t} ds \int_{t_*}^{s} d\tau \frac{\gamma}{2} = \frac{(t-t_*)^2\gamma}{4}.$$

Ma questo implica che $x(t)$ eventualmente esce da $I$, contrariamente all'ipotesi. Dunque i valori possibili del limite sono i punti di equilibrio.

Per quanto riguarda le condizioni iniziali abbiamo che gli unici moti asintotici ad un punto fisso accadono per punti di equilibrio instabile. Quindi le condizioni iniziali che danno luogo a moti asintotici sono $(0, 0), (\pm b, 0)$ e tutte le condizioni iniziali che hanno la stessa energia di $(a, 0)$, ovvero

$$\frac{1}{2}v_0^2 + U(x_0) = 0.$$

Cioè $v_0 = \pm\sqrt{-2U(x_0)}$, questo significa che

$$x_0 \in \{x \in \mathbb{R} \ : \ U(x) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \leq a+1\}.$$

**Esercizio 0.0.7.** *Supponiamo di vivere in una terra piatta e in assenza di atmosfera. Dato un corpo di massa $m$ sulla superficie terrestre con velocità $v = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, si dica per quale $\theta$ il corpo raggiunge il suolo nel punto più lontano possibile. Si trovi una equazione per il tempo in cui il corpo torna a terra nel caso di un attrito lineare (che modella, non benissimo, la presenza di una atmosfera).*

*Si dica se per piccoli attriti conviene una velocità più o meno verticale del caso senza attrito per raggiungere il punto più lontano possibile.*

**Soluzione dell'esercizio.** Sia $x \in \mathbb{R}^3$ e il piano terrestre sia $x_3 = 0$. Allora le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} = -mg(0,0,1) \\ &x(0) = 0\,; \dot{x}(0) = (\cos\theta, 0, \sin\theta). \end{aligned}$$

Ne segue che $x_2(t) = 0$, $x_1(t) = t\cos\theta$ e $x_3(t) = t\sin\theta - \frac{g}{2}t^2$. Dunque il corpo torna sulla superficie al tempo $t_0 = \frac{2}{g}\sin\theta$. Ne segue che $x_1(t_0) = \frac{2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{m}{g}\sin 2\theta$. Ne segue che $x_1(t_0)$ attiene il suo valore massimo, $\frac{1}{g}$, per $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Vediamo ora che succede in presenza di attrito. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - mg(0,0,1) \\ &x(0) = 0\,; \dot{x}(0) = (\cos\theta, 0, \sin\theta). \end{aligned}$$

Nuovamente $x_2(t) = 0$. Mentre,

$$\dot{x}_1(t) - \cos\theta = -\frac{\gamma}{m}x_1(t)$$

ovvero

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{\gamma}{m}t}x_1(t)\right] = e^{\frac{\gamma}{m}t}\cos\theta$$

quindi

$$x_1(t) = \frac{m}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right]\cos\theta.$$

Finalmente possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{\gamma}{m}t}\dot{x}_3(t)\right] = -e^{\frac{\gamma}{m}t}g.$$

Da cui,

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= e^{-\frac{\gamma}{m}t}\sin\theta - \frac{mg}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right] \\ x_3(t) &= \frac{m}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)\sin\theta - \frac{gm}{\gamma}t + \frac{gm^2}{\gamma^2}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right). \end{aligned}$$

Chiamando $t_0(\theta)$ il tempo per cui $x_3(t_0(\theta)) = 0$ si ha

$$\begin{aligned} t_0(\theta) &= \frac{1}{g}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}\right)\left(\sin\theta + \frac{mg}{\gamma}\right) \\ x_1(t_0(\theta), \theta) &= \frac{m}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}\right]\cos\theta. \end{aligned} \tag{0.0.2}$$

Se vogliamo capire come varia il tempo $t_0$ per piccoli $\gamma$ scriviamo

$$\begin{aligned}0 =& \frac{1-e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}}{g\gamma}\sin\theta + m\frac{1-e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}{\gamma^2}\\
=& \left(t_0(\theta)-\frac{\gamma}{2m}t_0^2\right)\sin\theta - \frac{g}{2}t_0^2 + \frac{g\gamma}{6m}t_0^3 + \mathcal{O}(\gamma^2)\end{aligned}$$

Ovvero

$$t_0 = \frac{2}{g}\sin\theta - \left(\frac{2}{g}\sin^2\theta + \frac{1}{3m}\right)\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)$$

$$\begin{aligned}t_0 &= \frac{2}{g}\sin\theta - \left(\frac{\sin\theta}{mg}t_0 - \frac{1}{3m}t_0^2\right)\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)\\
&= \frac{2}{g}\sin\theta - \left(\frac{2\sin^2\theta}{mg^2} - \frac{4\sin^2\theta}{3mg^2}\right)\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)\\
&= \frac{2}{g}\sin\theta - \frac{2\sin^2\theta}{3mg^2}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)\end{aligned}$$

D'altro canto differenziando la prima delle (0.0.2) rispetto a $\theta$ si ha

$$\begin{aligned}t_0'(\theta) =& \frac{\gamma}{gm}t_0'(\theta)e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}\left(\sin\theta + \frac{mg}{\gamma}\right) + \frac{1}{g}\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}\right)\cos\theta\\
=& \frac{\gamma}{gm}t_0'(\theta)\left(\sin\theta+\frac{mg}{\gamma}\right) - \frac{\gamma}{gm}t_0'(\theta)\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}\right)\left(\sin\theta+\frac{mg}{\gamma}\right)\\
&+ \frac{\cos\theta}{g\left(\sin\theta+\frac{mg}{\gamma}\right)}\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}\right)\left(\sin\theta+\frac{mg}{\gamma}\right)\\
=& \frac{\gamma}{mg}t_0'(\theta)\sin\theta + t_0'(\theta) - \frac{\gamma}{m}t_0'(\theta)t_0(\theta) + \gamma\frac{\cos\theta}{(\gamma\sin\theta+mg)}t_0(\theta)\end{aligned}$$

Ovvero,

$$\left(\frac{t_0(\theta)}{m} - \frac{\sin\theta}{mg}\right)t_0'(\theta) = \frac{\cos\theta}{(\gamma\sin\theta+mg)}t_0(\theta)$$

Sviluppando in $\gamma$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin\theta}{gm} - \frac{2\sin^2\theta}{3m^2g^2}\gamma\right)t_0'(\theta) &= \left(\frac{\cos\theta}{mg} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{m^2g^2}\gamma\right)\left(\frac{2}{g}\sin\theta - \frac{2\sin^2\theta}{3mg^2}\gamma\right)\\
&= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{mg^2} - \frac{8\cos\theta\sin^2\theta}{3m^2g^3}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2).\end{aligned}$$

Ovvero

$$t_0'(\theta) = \frac{2\cos\theta}{g} - 4\frac{\cos\theta\sin\theta}{3mg^2}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}x_1(t_0,\theta) &= e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}t_0'(\theta)\cos\theta - \frac{m}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}\right]\sin\theta \\
&= t_0'(\theta)\cos\theta - \frac{\gamma}{m}t_0(\theta)t_0'(\theta)\cos\theta - t_0(\theta)\sin\theta + \frac{\gamma}{2m}t_0^2(\theta)\sin\theta + \mathcal{O}(\gamma^2) \\
&= \frac{2\cos^2\theta}{g} - \frac{2}{g}\sin^2\theta - \frac{\sin\theta}{3mg^2}\left[16\cos^2\theta - 8\sin^2\theta\right]\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)
\end{aligned}$$

Ponendo $\theta = \frac{\pi}{4}$, si ha

$$\frac{d}{d\theta}x_1(t_0,\frac{\pi}{4}) = -\frac{4}{3\sqrt{2}mg^2}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2).$$

Ovvero la derivata di $x_1(t(\theta))$ per $\theta = \frac{\pi}{4}$ è negativa e questo significa che calando $\theta$ si atterra in un punto più lontano. Quindi in presenza di attrito per andare più lontano conviene partire con un angolo più piccolo di $\frac{\pi}{4}$.