Fisica Matematica I

Primo Appello, Sessione Invernale, 19-01-26

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia D un disco omogeneo di massa 1, raggio r e centro vincolato a $(0, 0)$ in un piano verticale. Ai punti opposti di un diametro del disco sono fissati due punti materiali di massa m e $2m$. Al punto di massa m è fissata una barra omegenea di massa m e di lunghezza $4r$ il cui altro estremo è vincolato a muoversi sulla retta $\{(r, y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$ al di sopra del punto situato sul disco. Si scriva la Lagrangiana. Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

2. Sia $\mathcal{A}_2$ lo spazio delle matrici due per due antisimmetriche e $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$. Si scriva la soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)^2 x(t) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

3. Un punto materiale di massa 1 si muove su di una retta orizzontale sottoposto alla sola forza di attrito $-\gamma\dot{x}$, dove x è la posizione del punto. Si assuma che il punto parta da zero con velocità v. Si studi come scegliere v per arrivare al punto 1 avendo dissipato la minore energia possibile.

Soluzione

1. Sia $r(\cos\theta, \sin\theta)$ la posizione del punto materiale di massa m. Detto α l'angolo della barra con la verticale, si ha $\sin\alpha = \frac{1-\cos\theta}{4}$. Mentre il centro di massa è dato da
$$\xi = r(\cos\theta, \sin\theta) + 2r(\sin\alpha, \cos\alpha) = r\left(\frac{1+\cos\theta}{2}, \sin\theta + 2\cos\alpha\right).$$
Calcoliamo l'energia cinetica. L'energia cinetica del disco è data da
$$\frac{1}{4}r^2\dot{\theta}^2.$$
Quella dei punti materiali da
$$\frac{3m}{2}r^2\dot{\theta}^2.$$
Quella della barra
$$\frac{m}{2}\|\dot{\xi}\|^2 + \frac{m}{6}r^2\dot{\alpha}^2.$$
Si noti che $4\dot{\alpha}\cos\alpha = \dot{\theta}\sin\theta$. Quindi
$$\dot{\theta}^2\sin^2\theta = 16\dot{\alpha}^2(1-\sin^2\alpha) = \dot{\alpha}^2(16 - 1 + 2\cos\theta - \cos^2\theta) = \dot{\alpha}^2(14 + 2\cos\theta + \sin^2\theta).$$
Si noti che $14 + 2\cos\theta + \sin^2\theta > 12$ per ogni θ. Inoltre, per costruzione $\cos\alpha \geqslant 0$. Quindi,
$$\dot{\alpha} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{14 + 2\cos\theta + \sin^2\theta}}\dot{\theta}.$$
Ne segue che l'energia cinetica totale è $\frac{1}{2}M(\theta)\dot{\theta}^2$ per una qualche funzione M strettamente positiva la cui forma esatta verrà calcolata solo se necessario.
Il potenziale è dato da
$$\begin{aligned} V(\theta) &= mgr\sin\theta - 2mr\sin\theta + mgr(\sin\theta + 2\cos\alpha) = 2mgr\cos\alpha \\ &= mgr\sqrt{2 + 2\cos\theta + 2\sin^2\theta}. \end{aligned}$$
Dunque la Lagrangiana è
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\theta)\dot{\theta}^2 - V(\theta).$$
I punti di equilibrio sono dati da $\beta(\theta) := -2\sin\theta + 4\sin\theta\cos\theta = 0$, cioè $\theta \in \{0, \pi\}$ e $\cos\theta = \frac{1}{2}$, quindi $\theta \in \{\pm\frac{\pi}{3}\}$. Poiché $V'(\theta)$ ha lo stesso segno di $\beta(\theta)$, abbiamo che per θ vicino a zero $V'(\theta)$ ha lo stesso segno di $\sin\theta$, quindi V ha un minimo, e zero è un punto fisso stabile. Analogamente π è instabile. D'altro canto, per θ vicino a $\pi/3$, $V'(\theta)$ ha lo stesso segno di $-2 + 4\cos\theta$, quindi è un massimo di V, e instabile. Ne segue che $-\pi/3$ è un punto stabile.

2. Se $A \in \mathcal{A}_2$ allora
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ -b(t) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^2 = -b(t)^2\mathbb{1}.$$
Quindi la soluzione è $x(t) = x_0 e^{-\int_0^t b(s)^2 ds}$.

3. Le equazioni del moto sono
$$\begin{aligned} &\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \\ &x(0) = 0\ ,\ \dot{x}(0) = v \end{aligned}$$

La soluzione è $x(t) = \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma} v$. Per arrivare a 1 occorre che sia $v > \gamma$ e occorre il tempo $t(v) = \gamma^{-1} \ln \frac{v}{v-\gamma}$. L'energia dissipata è

$$\Delta E := \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\dot{x}(t(v))^2 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}e^{-2\gamma t(v)}v^2.$$

Poiché $e^{-\gamma t(v)} = \frac{v-\gamma}{v}$, si ha

$$\Delta E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}(v-\gamma)^2 = \gamma v - \frac{1}{2}\gamma^2 = \gamma(v - \frac{1}{2}\gamma).$$

Dunque il meglio che si può fare è partire con una velocità pochissimo maggiore di γ, che dà una dissipazione arbitrariamente vicina a $\frac{1}{2}\gamma^2$. Ovviamente il minimo non viene realizzato perché richiederebbe un tempo infinito.