Fisica Matematica I

Secondo Appello, Sessione Autunnale, 17-09-25

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Su un piano orizzontale due particelle di massa $m = 1$ sono vincolate a muoversi su due rette perpendicolari. Sono inoltre soggette ad un potenziale uguale all'inverso della loro distanza dall'intersezione delle due rette e sono unite da una molla di costante elastica uno. Si scriva la Lagrangiana, si trovino le posizioni di equilibrio e si studi la loro stabilità. Per le posizioni di equilibrio stabili si studino le piccole oscillazioni e se ne determini il periodo.

2. Sia $V_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una funzione tale che $V_0(0) = V_0'(0)$, $V_0(x) = V_0(-x)$ e $V_0''(x) > 0$. Si consideri una particella di massa m soggetta al potenziale $V(x) = \kappa V_0(x)$. Data la condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, sia $x_{m,\kappa}(t)$ il moto della particella. Si mostri che il moto è periodico per ogni $\kappa, m > 0$ e, detto $T_{m,\kappa}$ il periodo del moto, si studi
$$\lim_{\lambda \to +\infty} T_{\lambda, \lambda^\alpha}$$
al variare di $\alpha \in (0, 2)\backslash\{1\}$.

3. Si consideri, in un piano verticale, un lamina quadrata omogenea $ABCD$, di lato ℓ e massa m, vincolata a scorrere senza attrito con il suo vertice A sull'asse x. Sul puno A della lamina agisce una forza elastica proporzionale alla distanza dall'origine, mentre sul puno B agisce una forza costante F, parallela all'asse x, e diretta nella direzione positiva. Si scriva la lagrangiana e si trovino i punti di equilibrio per cui B sta sopra l'asse delle x.

Soluzione

1. Possiamo usare le due rette come assi di un sistema di coordiante cartesiano in modo che x e y identifichino le posizioni delle due particelle. Ne segue che il potenziale è dato da

$$V(x,y) = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

e la lagrangiana da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - V(x,y).$$

I punti di equilibrio sono determinati dalle equazioni

$$\begin{aligned} &- x^{-2}\,\mathrm{sign}(x) + x = 0 \\ &- y^{-2}\,\mathrm{sign}(y) + y = 0. \end{aligned}$$

Ovvero $|x|^2 = 1$, and $|y|^3 = 1$, quindi $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. D'altro canto

$$D^2V(x,y) = \begin{pmatrix} 2|x|^{-3} + 1 & 0 \\ 0 & 2|y|^{-3} + 1 \end{pmatrix}$$

dunque tutti i punti di equilibrio sono stabili. Poichè la langrangiana è simmetrica rispetto alla riflessione attorno agli assi, è sufficiente studiare un solo equilibrio, per esempio $x = y = 1$. La lagrangiana di piccole oscillazone è data da

$$\mathcal{L}_0(x,y) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2$$

le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -3x \\ \ddot{y} &= -3x \end{aligned}$$

dunque le soluzioni sono periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

2. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = \lambda^{\alpha-1} V_0'(x) \\ &x(0) = 0\,, \dot{x}(0) = 1. \end{aligned}$$

Poichè il potenziale è convesso il moto è periodico e avvine nelle regione in cui $\lambda^\alpha V_0(x) \leqslant \frac{\lambda}{2}$, ovvero il potenziale è minore dell'energia della particella. Gli estremi $x_\pm$ di tale intervallo soddisfano $V_0(x_\pm) = \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}$. Si noti that, per ipotesi, $\lim_{x\to\infty} V_0(x) = +\infty$. Se $\alpha < 1$, poichè V_0 è limitata sui compatti, $\lim_{\lambda\to+\infty} |x_\pm| = \infty$. Ma $|\dot{x}| \leqslant 1$, quindi

$$\lim_{\lambda\to+\infty} T_{\lambda,\lambda^\alpha} = \infty.$$

Se $\alpha > 1$ allora $\lim_{\lambda\to+\infty} |x_\pm| = 0$. Possiamo scrivere

$$T_{\lambda,\lambda^\alpha} = 4\int_0^{x_+} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda^{\alpha-1}V_0(x)}} dx.$$

Se poniamo $x_+ = \lambda^{\frac{1-\alpha}{2}} z$ abbiamo $\frac{V_0''(0)}{2}\lambda^{1-\alpha}z^2 + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{3(1-\alpha)}{2}}z^3) = \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}$. Ovvero,

$$z = [V_0''(0)]^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}}).$$

Da cui

$$
\begin{aligned}
T_{\lambda,\lambda^\alpha} &= 4\int_0^{x_+} \frac{1}{\sqrt{2\lambda^{\alpha-1}[V_0(x_+)-V_0(x)]}}dx = 4\int_0^{z} \frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{2\lambda^{\alpha-1}[V_0(\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}}z)-V_0(\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}}\zeta)]}}d\zeta \\
&= 4\int_0^{z} \frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{2(z^2-\zeta^2)+\mathcal{O}((z-\zeta)\lambda^{\frac{(1-\alpha)}{2}})]}}d\zeta \\
&= 4z\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-\xi)[(1+\zeta+\mathcal{O}(\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}})]}}d\xi.
\end{aligned}
$$

Si noti che $\lim_{\lambda\to+\infty} z = [V_0''(0)]^{-\frac{1}{2}}$ e

$$
\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-\xi)[(1+\zeta+\mathcal{O}(\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}})]}}d\xi = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = 2\pi,
$$

per cui

$$
\lim_{\lambda\to+\infty} T_{\lambda,\lambda^\alpha} = 0.
$$

3. Sia x la coordinata del punto A e θ l'angolo tra AB e l'asse orizzontale. Descriviamo la posizione di un punto generico della lamina come $z(x,a) = xe_1 + R(\theta)a$ dove $a \in [0,\ell]^2$ e

$$
R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.
$$

Sia

$$
R'(\theta) := \frac{d}{d\theta}R(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}.
$$

La densità della lamina è $\rho = m\ell^{-2}$. Ne segue che l'energia cinetica è data da

$$
\begin{aligned}
T =& \frac{1}{2}\int_{[0,\ell]^2} da\rho\|\dot{x}e_1 + \dot{\theta}R'(\theta)a\|^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{\theta}\int_{[0,\ell]^2}\rho\langle e_1, R'(\theta)a\rangle da + \frac{\dot{\theta}^2}{2}\int_{[0,\ell]^2}\rho\|R'(\theta)a\|^2 da \\
=& \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \dot{x}\dot{\theta}\int_{[0,\ell]^2}\rho\langle(\sin\theta,\cos\theta),a\rangle da + \frac{\dot{\theta}^2}{2}\int_{[0,\ell]^2}\rho\|a\|^2 da \\
=& \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \ell m(\sin\theta+\cos\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2.
\end{aligned}
$$

Il potenziale della molla è dato da $\frac{1}{2}x^2$, quello della forza da $-F(x+\ell\cos\theta)$ mentre il potenziale gravitazionale è

$$
\int_{[0,\ell]^2}\rho\langle e_2, xe_1 + R(\theta)a\rangle da = \int_{[0,\ell]^2}\rho\langle(\sin\theta,\cos\theta),a\rangle da = \frac{m\ell}{2}(\sin\theta+\cos\theta).
$$

Ovvero

$$
V = \frac{1}{2}x^2 - F(x+\ell\cos\theta) + \frac{m\ell}{2}(\sin\theta+\cos\theta).
$$

Possiamo quindi scrivere la Lagrangiana

$$
\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \ell m(\sin\theta+\cos\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}x^2 + F(x+\ell\cos\theta) - \frac{m\ell}{2}(\sin\theta+\cos\theta).
$$

I punti di equilibrio sono determinati da

$$\begin{aligned} & x - F = 0 \\ & F\ell \sin\theta + \frac{m\ell}{2}(\cos\theta - \sin\theta) = 0 \end{aligned}$$

Ovvero $x = F$, $\tan\theta = \frac{1}{1-\frac{2F}{m}}$ if $m \neq 2F$ and $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ altrimenti.