Fisica Matematica I

Primo Appello, Sessione Autunnale, 29-08-25

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Per ogni $M > 0$ e si consideri la Lagrangiana $\mathcal{L}_M \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$
$$\mathcal{L}_M(x, \dot{x}, X, \dot{X}) = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + \frac{M}{2}\|\dot{X}\|^2 - \frac{1}{2}\|x - X\|^2.$$
Detta E l'energia totale del sistema si consideri in moto (x_M, X_M) con condizioni iniziali $x = x_*$, $X = 0$ $E = \frac{M}{2} + \frac{1}{2}\|x_*\|^2$ e $\dot{x} = 0$. Si descriva il moto di x_M nel limite $M \to \infty$.

2. Una barra di densità uno e lunghezza ℓ ha attaccato, ad una estremità, un punto materiale di massa m. Tale barra è libera di muoversi in un piano verticale. Inoltre è presente una forza il cui potenziale, per un punto materiale di massa μ e posizione η, è $V(\eta) = \frac{k\mu}{2}\|\eta\|^2$. Si scrivano le equazioni del moto, si trovino le configurazioni di equilibrio e si esibisca un moto periodico.

3. Due particelle puntiformi, rispettivamente di massa M e m, $M > m$, si muovono su di una retta orizzontale in assenza di forze con condizioni iniziali $X(0) = -1$, $\dot{X}(0) = 1$ e $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, rispettivamente. Se ne descriva il moto tenendo conto che la loro eventuale collisione è elastica (ovvero durante la collisione si conservano sia il momento totale che l'energia totale).

Soluzione

1. Le equaioni di Eulero Lagrange sono

$$M\ddot{X} = x - X$$
$$\ddot{x} = X - x$$

Siano x_M, X_m le soluzioni con le condizioni al contorno date. Dunque

$$M\dot{X}(t) = M + \int_0^t (x(s) - X(s))ds$$
$$\dot{x} = \int_0^t (X(s) - x(s))ds.$$

Sia T il primo tempo in cui $\|x - X\| = 2\|x_*\|$, allora, per tutti i tempi $t \leqslant T$, X_M e x_M hanno la derivata seconda limitata. Me segue che possiamo prendere il limite X_∞ e ottenere $\ddot{X}_\infty = 0$ per tutti i tempi $t \leqslant T$. Ovvero $X_\infty(t) = t$. Mentre

$$\ddot{x}_\infty = t - x_\infty$$

Inoltre, abbiamo che l'energia ha il limite

$$\frac{1}{2}\|\dot{x}_\infty\|^2 + \frac{M}{2} + \frac{1}{2}\|x_\infty - t\|^2 = \frac{M}{2} + \frac{1}{2}\|x_*\|^2.$$

Ne segue che

$$\|x_\infty - t\| \leqslant \|x_*\|,$$

ovvero $T = \infty$. Ne segue che, ponendo $z = x_\infty - t$ si ha $\ddot{z} = -z$, dunque $z(t) = a\cos t + b\sin t$ e $z(0) = x_*$, $\dot{z}(0) = -1$ da cui segue

$$x_\infty(t) = t + x_* \cos t - \sin t.$$

2. Consideriamo la barra con un estremo in $(0,0)$ e l'altro, quello su cui si trova il punto materiale, in $(0,\ell)$. Allora il centro di massa ha coordinate $(x_c, 0)$ dove

$$x_c = \frac{\int_0^\ell x dx + m\ell}{\ell + m} = \frac{\ell + 2m}{2(\ell + m)}\ell.$$

Possiamo quindi calcolare il momento di inerzia rispetto al centro di massa:

$$I = \ell^2 \int_0^\ell (x - x_c)^2 + m(\ell - x_c)^2 = \frac{\ell^6 + 6\ell^5 m + 15\ell^4 m^2 + 4\ell^3 m^3}{12(m+\ell)^3}.$$

Chiamando $\xi = (x, y)$ le coordinate del centro di massa e θ l'angolo della barra con l'orizzontale, Allora un punto a distanza z dal centro di massa ha coordinate $\xi + zv(\theta)$, dove $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Possiamo quindi calcolare il potenziale

$$\begin{aligned} V(\xi,\theta) &= \int_{-\frac{\ell+2m}{2(\ell+m)}\ell}^{\frac{\ell^2}{2(\ell+m)}} dz \frac{k}{2}\left(\|\xi\|^2 + 2z\langle\xi, v(\theta)\rangle + z^2\right) + \frac{km}{2}\left(\|\xi\|^2 + \frac{\ell^2\langle\xi, v(\theta)\rangle}{(\ell+m)} + \left[\frac{\ell^2}{2(\ell+m)}\right]^2\right) \\ &= \frac{k(m+\ell)}{2}\|\xi\|^2 + C, \end{aligned}$$

per qualche costante C. La Lagrangiana ha quindi la forma

$$\mathcal{L} = \frac{m+\ell}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 - (m+\ell)y - \frac{k(m+\ell)}{2}\|\xi\|^2.$$

Dunque le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -e_2 - k\xi \\ I\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio sono quindi $\xi = (0, -\frac{1}{k})$, $\dot{\xi} = (0,0)$, $\dot{\theta} = 0$, per qualunque valore di θ.

Se introduciamo le variabili $\eta = \xi + \frac{1}{k}$, ne segue che

$$\ddot{\eta} = -k\eta.$$

Dunque tutti i moti in ξ sono periodici con frequenza $\omega = \sqrt{k}$. Si ha quindi un moto periodico se e solo se $\theta(t) = \frac{\omega}{2\pi}t + \theta_0 \mod 2\pi$.

3. La prima particella si muove di moto rettilineo uniforme e collide al tempo uno in zero con la particella ferma. Per un urto generico, usando il $-$ e il $+$ per le quantità prima e dopo la collisione, rispettivamente, le leggi di conservazione sono

$$\begin{aligned} M\dot{X}_+ + m\dot{x}_+ &= M\dot{X}_- + m\dot{x}_- \\ M\dot{X}_+^2 + m\dot{x}_+^2 &= M\dot{X}_-^2 + m\dot{x}_-^2. \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} M(\dot{X}_+ - \dot{X}_-) &= m(\dot{x}_- - \dot{x}_+) \\ M(\dot{X}_+ - \dot{X}_-)(\dot{X}_+ + \dot{X}_-) &= m(\dot{x}_- - \dot{x}_+)(\dot{x}_- + \dot{x}_+). \end{aligned}$$

Dunque deve essere $(\dot{X}_+ + \dot{X}_-) = (\dot{x}_- + \dot{x}_+)$. Ponendo $\Delta = \dot{X}_+ - \dot{X}_-$ e $\delta = \dot{x}_+ - \dot{x}_-$ si ha quindi

$$\begin{aligned} M\Delta &= -m\delta \\ \Delta &= \delta + 2(\dot{x}_- - \dot{X}_-). \end{aligned}$$

Ovvero,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2M}{m+M}(\dot{X}_- - \dot{x}_-) \\ \Delta &= \frac{2m}{m+M}(\dot{x}_- - \dot{X}_-). \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \dot{X}_+ &= \frac{M-m}{m+M}\dot{X}_- + \frac{2m}{m+M}\dot{x}_- \\ \dot{x}_+ &= \frac{m-M}{m+M}\dot{x}_- + \frac{2M}{m+M}\dot{X}_-. \end{aligned}$$

Sostituendo le condizioni iniziali si ha che dopo la collisione

$$\begin{aligned} \dot{X}_+ &= \frac{M-m}{m+M} \\ \dot{x}_+ &= \frac{2M}{m+M}. \end{aligned}$$

Si noti che $\dot{X}_+ < \dot{x}_+$ quindi le due particelle non posso più collidere e conseguentemente dalla collisione in poi si muoveranno di moto rettilineo uniforme con velocità $\dot{x}_+$ e $\dot{X}_+$, rispettivamente.