Fisica Matematica I

Secondo Appello, Sessione Estiva, 23-07-25

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = -y + 2xy. \end{cases}$$

   Si trovino i punti stazionari e si discuta la loro stabilità lineare. Si mostri che se $x(0) > 0$ e $y(0) > 0$, allora $x(t) > 0$ e $y(t) > 0$ per ogni $t > 0$.

2. Si considerino i potenziali $V_\lambda(x) = \sin(\lambda x)$. E sia $x(t,\lambda)$ la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = -V'_\lambda(x) \\ &x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 2. \end{aligned}$$

   Si studi $\lim_{\lambda\to\infty} x(t,\lambda)$.

3. Supponete di essere su un pianeta senza atmosfera e con gravità superficiale g. Il pianeta ha una luna alla distanza ρ che percorre un'orbita circolare di frequenza ω. Se lanciate un oggetto radialmente con velocità v quale è la velocità minima che dovete imprimere perchè l'oggetto non ricada sul pianeta?[1] Se $g = 10\ m/s^2$, $\omega^{-1} = 2 \cdot 10^6\ s$ e $\rho = 10^8\ m$, una velocità di 500 km/h è sufficiente?

[1] Si assuma che la forza di gravità della luna sull'oggetto sia trascurabile.

Soluzione

1. I punti stazionari sono $x = y = 0$ e $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$. La stabilità lineare è determinanata dai sistemi lineari

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$

   e, ponendo $x = \frac{1}{2} + \xi$ e $y = 1 + \eta$,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{1}{2}\eta \\ \dot{\eta} &= 2\xi \end{aligned}$$

   Dunque la stabilità dipende dagli autovalori delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Ne segue che $(0,0)$ è instabile mentre $(1/2, 1)$ è linearmente stabile.

   Si noti che $x = 0$ e $y = 0$ sono due soluzioni del sistema, quindi le soluzioni non possono attraversare gli assi, per cui le soluzioni che partano dal primo quadrante non possono uscirne.

2. Dalla conservazione dell'energia segue

$$\dot{x}(t) = \sqrt{4 - 2\sin(\lambda x(t))}.$$

   Questo implica

$$t = \int_0^{x(t,\lambda)} \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sin(\lambda x)}} dx.$$

   Sia $k(t, \lambda)$ tale che $|2\pi\lambda^{-1}k(t,\lambda) - x(t,\lambda)| \leqslant 2\pi\lambda^{-1}$. Allora

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{2\pi\lambda^{-1}k(t,\lambda)} \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sin(\lambda x)}} dx + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \\ &= \lambda^{-1} \int_0^{2\pi k(t,\lambda)} \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sin(z)}} dz + \mathcal{O}(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

   Quindi, ponendo $a := \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4-2\sin(z)}} dz$ otteniamo

$$t = \lambda^{-1}k(t,\lambda)a + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = \frac{x(t,\lambda)}{2\pi} a + \mathcal{O}(\lambda^{-1}).$$

   Da cui segue $x(t,\lambda) = \frac{2\pi}{a} t + \mathcal{O}(\lambda^{-1})$. Quindi $\lim_{\lambda\to\infty} x(t,\lambda) = \frac{2\pi}{a} t$.
   Poichè $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ è una funzione strettamente convessa, la disuguaglianza di Jensen implica

$$a > \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [4 - 2\sin(z)] dz}} = \pi.$$

   Ovvero, nel limite il moto è rettilineo uniforme, ma con una velocità inferiore a quella iniziale.

3. La forza di gravità è data dal potenziale di Newton $V(x) = -\frac{GmM}{\|x\|}$. Detto R il raggio del pianeta l'energia iniziale è data da $E = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GmM}{R}$. Essendo la direzione iniziale radiale, il moto rimane radiale, e quindi può essere descritto usando solo la distanza z dal centro del pianeta. Dalla conservazione della energia segue

$$E = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - \frac{GmM}{z}.$$

Poichè il corpo non ricade sul pianeta solo se la velocità non si annulla deve essere

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{GmM}{R} \geqslant -\frac{GmM}{z}$$

e poichè questo deve valuere per qualunque z deve essere

$$v \geqslant \sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

La forza di gravità sulla superficie è data da $g = \frac{GM}{R^2}$. Inoltre la luna è soggetta ad una forza centrifuga $\omega^2\rho$, che deve essere equilibrata dalla forza di gravità, ovvero $\omega^2\rho = \frac{GM}{\rho^2}$. Ne segue che $GM = \omega^2\rho^3$ e quindi il raggio del pianeta deve essere $R = \sqrt{\frac{\omega^2\rho^3}{g}}$. Da cui segue

$$v \geqslant \sqrt{2\omega^2\rho^3\sqrt{\frac{g}{\omega^2\rho^3}}} = \left[4g\omega^2\rho^3\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Se inseriamo in numeri dati dal testo si vede che $v \geqslant 10^3 m/s$ che è molto maggiore di $500 km/h$.