

Fisica Matematica I

Primo Appello, Sessione Estiva, 17-06-25

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si considerino due pendoli di massa 1 e lunghezza ℓ , uno vincolato a muoversi nel piano verticale $\{x = 0\}$ l'altro nel piano $\{x = 1\}$, con punti di sospensione $(0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0)$. Essi interagiscono attraverso una molla di costante elastica $\kappa = 1$. Si scriva la Lagrangiana e le equazioni del moto. Si determinino i punti di equilibrio al variare di ℓ . Si dica se esistono valori di ℓ e un punto fisso stabile per cui tutti i moti di piccole oscillazioni sono periodici.
2. Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un insieme compatto e convesso col bordo liscio. Siano $x_1, x_2, x_3 \in \partial K$ tre punto sul bordo e si consideri la funzione

$$f(x_1, x_2, x_3) = \|x_2 - x_1\| + \|x_3 - x_2\| + \|x_1 - x_3\|.$$

Si mostri che i punti stazionari di $f > 0$ corrispondono a orbite periodiche di una particella che si muove di moto rettilineo uniforme e collide elasticamente col bordo. Se ne deduca che una particella che si muove in K , in assenza di forze esterne, e che collide elasticamente col bordo ammette orbite periodiche con tre collisioni.

3. Si considerino due dischi di raggio $\frac{1}{4}$ e massa 1, che si muovono su di un piano orizzontale. Il primo ha il centro vincolato all'asse delle x , il secondo ha il centro vincolato all'asse delle y . Detto (x, y) il centro di un disco, esso è soggetto ad un potenziale differenziabile $V(x, y) = g(x)$, dove $g \geq 0$, $g(x) = 0$ per $x \notin (0, 2)$ e $g(x) = \frac{1}{4}$ per $x \in [1/2, 3/2]$. Date le condizioni iniziali per il centro dei due dischi $Y = (0, 2)$, $\dot{Y} = (0, -1)$ e $X = (2, 0)$, $\dot{X} = (-1, 0)$ si dica se i dischi collideranno nel futuro oppure no.

Soluzione

1. Chiamando θ e φ gli angoli con la verticale formati dai due pendoli si può scrivere la Lagrangiana come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\ell^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + g\ell \cos \theta + g\ell \cos \varphi - \frac{1}{2}(1 + 2\ell^2 - 2\ell^2 \cos(\theta - \varphi)).$$

I punti di equilibrio corrispondono ai minimi del potenziale, ovvero

$$\begin{aligned} g\ell \sin \theta + \ell^2 \sin(\theta - \varphi) &= 0 \\ g\ell \sin \varphi - \ell^2 \sin(\theta - \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi deve essere $\sin \theta = -\sin \varphi$ ovvero $\varphi = -\theta + k\pi$. Allora

$$\sin(\theta - \varphi) = \sin(2\theta - k\pi) = (-1)^k \sin(2\theta) = 2(-1)^k \sin \theta \cos \theta.$$

Abbiamo quindi le soluzioni $\theta = 0, \varphi = 0$; $\theta = 0, \varphi = \pi$; $\theta = \pi, \varphi = 0$; $\theta = \pi, \varphi = \pi$. Inoltre, si ha

$$g\ell \pm 2\ell^2 \cos \theta = 0$$

Ovvero

$$\cos \theta = \pm \frac{g}{2\ell}$$

che ammette soluzioni per $\ell \geq \frac{g}{2}$. Otteniamo così altre 4 soluzioni.

Consideriamo il punto di equilibrio $\theta = \varphi = 0$. Lagrangiana di piccole oscillazioni è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}\ell^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) - \frac{g\ell}{2}\theta^2 - \frac{g\ell}{2}\varphi^2 - \frac{\ell^2}{2}(\theta - \varphi)^2 = \frac{1}{2}\langle(\dot{\theta}, \dot{\varphi}), M(\dot{\theta}, \dot{\varphi})\rangle - \frac{1}{2}\langle(\theta, \varphi), V(\theta, \varphi)\rangle \\ M &= \ell^2 \mathbf{1}; \quad V = \begin{pmatrix} g\ell + \ell^2 & -\ell^2 \\ -\ell^2 & g\ell + \ell^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gli autovalori di V sono $\lambda_1 = g\ell$ e $\lambda_2 = g\ell + 2\ell^2$, dunque il punto fisso è stabile. Le frequenze del moto sono determinate dagli autovlari della matrice Ω definita da

$$\Omega^2 = M^{-\frac{1}{2}} V M^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} g\ell^{-1} + 1 & -1 \\ -1 & g\ell^{-1} + 1 \end{pmatrix}$$

ovvero $\omega_1 = \sqrt{g/\ell}$, $\omega_2 = \sqrt{g/\ell + 2}$. I moti sono periodici solo se esistono $T \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $\omega_1 T = 2\pi p$ e $\omega_2 T = 2\pi q$. Questo è possibile se e solo se $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, ovvero

$$\ell = \frac{g}{2} \left(\frac{q^2}{p^2} - 1 \right)$$

che da valori ammissibili di ℓ se $q > p$.

2. Sia ℓ la lunghezza del bordo e $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la parametrizzazione del bordo per lunghezza. Per ipotesi $\gamma \in \mathcal{C}^\infty$. Siano $\{s_i\}_{i=1}^3$ tre punti sul bordo ($\gamma(s_i) = x_i$). Allora i punti stazionari di f corrispondono ai punti stazionari di $g(s) = f \circ \gamma$, ovvero

$$g(s_1, s_2, s_3) = \|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\| + \|\gamma(s_3) - \gamma(s_2)\| + \|\gamma(s_1) - \gamma(s_3)\|.$$

Ovvero, se $\gamma(s_i) \neq \gamma(s_j)$, per $i \neq j$,

$$\begin{aligned} -\frac{\langle \gamma(s_2) - \gamma(s_1), \dot{\gamma}(s_1) \rangle}{\|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\|} + \frac{\langle \gamma(s_1) - \gamma(s_3), \dot{\gamma}(s_1) \rangle}{\|\gamma(s_1) - \gamma(s_3)\|} &= 0 \\ \frac{\langle \gamma(s_2) - \gamma(s_1), \dot{\gamma}(s_2) \rangle}{\|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\|} - \frac{\langle \gamma(s_3) - \gamma(s_2), \dot{\gamma}(s_2) \rangle}{\|\gamma(s_3) - \gamma(s_2)\|} &= 0 \\ \frac{\langle \gamma(s_3) - \gamma(s_2), \dot{\gamma}(s_3) \rangle}{\|\gamma(s_3) - \gamma(s_2)\|} - \frac{\langle \gamma(s_1) - \gamma(s_3), \dot{\gamma}(s_3) \rangle}{\|\gamma(s_1) - \gamma(s_3)\|} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Si noti che, per costruzione $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$. Se poniamo $v_- = \|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\|^{-1}(\gamma(s_1) - \gamma(s_2))$, $v_+ = \|\gamma(s_1) - \gamma(s_3)\|^{-1}(\gamma(s_3) - \gamma(s_1))$ e chiamiamo $n(s)$ la normale a ∂K nel punto $\gamma(s)$ che punta all'interno di K , possiamo scrivere $v_- = \dot{\gamma}(s_1) \sin \theta_- - n(s_1) \cos \theta_-$, dove θ_- è l'angolo che la retta parallela a v_- forma con la normale. Analogamente possiamo scrivere $v_+ = \dot{\gamma}(s_1) \sin \theta_+ + n(s_1) \cos \theta_+$. Inserendo questa rappresentazione nella prima delle (1) si ottiene $\theta_- = \theta_+$, ovvero lo stesso risultato che si otterrebbe in una riflessione elastica. Lo stesso vale per le altre equazioni. Ne segue che i punti stazionari avvengono esattamente per configurazioni che corrispondono al moto di una particella che si muove di moto rettilineo uniforme e collide elasticamente col bordo (in termini tecnici si chiama un *biliardo*).

Infine, essendo g una funzione continua su un compatto ha necessariamente massimi e minimi. I minimi globali corrispondono banalmente a $s_1 = s_2 = s_3$ per cui $g = 0$. Il massimo invece non può essere tale per cui $s_i = s_j$ per qualche $i \neq j$, altrimenti, spostando un punto, la disuguaglianza triangolare implicherebbe che g aumenta contraddicendo che ci troviamo in un massimo. Ne segue che il massimo di g corrisponde ad una traiettoria periodica con tre collisioni.¹

3. Poichè il potenziale agisce solo sul centro del disco questi ruoteranno con velocità angolare uniforme e la loro rotazione è irrilevante per quanto riguarda il moto del centro. Il problema è quindi equivalente a quello di due punti (i centri) che si muovono sotto l'influenza del potenziale e ci si chiede se saranno mai più vicini di $\frac{1}{2}$ (collisione). Il moto del centro di Y è dato da $Y(t) = 2 - t$. Al contrario il moto dell'altro disco soddisfa²

$$\dot{X}(t) = \sqrt{1 - 2G(X)} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1/2, 3/2]}(X)}.$$

Sia τ_1 il tempo in cui $X(t) = \frac{3}{2}$ e τ_2 il tempo in cui $X(t) = \frac{1}{2}$. Allora $\tau_1 \geq \frac{1}{2}$ e

$$\frac{1}{2} = X(\tau_2) = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}(\tau_2 - \tau_1).$$

Ovvero $\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{2}$. Finalmente, per $t \geq \tau_2$ si ha $X(t) \geq \frac{1}{2} - (t - \tau_2)$. Ne segue che la distanza tra i centri dei due dischi è stimata da

$$\|Y(t) - X(t)\| \geq \sqrt{(2-t)^2 + \left[\frac{1}{2} - (t - \tau_2)\right]^2}.$$

Il minimo della stima inferiore si ha per $t = \frac{3}{4} + \frac{\tau_2}{2}$, che, ricordando che $\tau_2 \geq \sqrt{2} + \frac{1}{2}$, da

$$\|Y(t) - X(t)\| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\tau_2 - \frac{1}{2} \right) \geq 1$$

ovvero i dischi sono sempre troppo lontani per collidere.

¹Non so a voi, ma a me pare leggermente sorprendente che l'esistenza di orbite periodiche segue dalla sola convessità.

²Con $\mathbf{1}_A$ indichiamo la funzione caratteristica dell'insieme A .