Chapter 3

Gravità e meccanica celeste

3.1 Gravità tra punti materiali

La forza di gravità che un *punto materiale*[1] situato in $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ e di massa inerziale m_2 esercita su di un punto materiale posto in $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^3$ e di massa inerziale m_1 è data da

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = G\frac{m_1 m_2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)}{\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|^3}\ , \tag{3.1.1}$$

dove G è una costante universale che deve essere determinata sperimentalmente. In questa nota ci vogliamo, inizialmente, occupare del seguente semplice problema. Assumendo che un pianeta sia una sfera e consista di un insieme molto grande di punti materiali molto vicini tra di loro. Quale è la forza $\boldsymbol{F}$ esercitata dalla terra su un punto materiale di massa m che sta ad una altezza $h > 0$ sulla superficie del pianeta?

3.2 Che fare con tanti punti materiali?

Il modello del pianeta è stato lasciato un poco troppo nel vago, per fare un conto matematico occorre renderlo assai più preciso. In generale dobbiamo discutere la distribuzione di massa di un corpo esteso. Cominciamo da un semplice esempio: un solido descritto da un insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ con struttura cristallina, ovvero formato di punti materiali, tutti di ugual massa m_ε , disposti ai vertici di un reticolo[2] cubico[3] di passo ε. Più precisamente il pianeta è composto dai punti

[1]Per *punto materiale* si intende un oggetto idealizzato che ha massa ma non estensione, ovvero la cui estensione è trascurabile rispetto a tutte le altre grandezze che si stanno considerando.

[2]Un reticolo è un sottogruppo di $\mathbb{R}^3$. In generale si può scrivere come $\{av_1 + bv_2 + cv_3\}_{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3}$ dove $\{v_1, v_2, v_3\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

[3]Significa che $v_1 = \ell(1,0,0)$, $v_2 = \ell(0,1,0)$ e $v_3 = \ell(0,0,1)$ per un qualche $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$ detto *passo del reticolo*.

materiali $\{\varepsilon \boldsymbol{z}\}_{\boldsymbol{z}\in A_\varepsilon}$ dove $A_\varepsilon = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^3 \ : \ \varepsilon \boldsymbol{z} \in A\}$. Dunque, la sua massa totale è

$$M_A = \sum_{\boldsymbol{z}\in A_\varepsilon} m_\varepsilon .$$

Esercizio 3.2.1. *Si mostri che se ∂A è abbastanza regolare (spiegare che significa), allora $\lim_{\varepsilon\to 0} \# A_\varepsilon \varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\boldsymbol{z}\in A_\varepsilon} \varepsilon^3 = \int_A 1 dx$, ovvero la misura di Peano-Jordan di A.*

Ne segue che M_A è essenzialmente indipendente da ε a patto che $m_\varepsilon = \rho\varepsilon^3$ e che ε sia molto piccolo.

Esercizio 3.2.2. *Si mostri che le conclusioni dell'esercizio 3.2.1 valgono anche se i punti materiali sono disposti su di un reticolo non cubico (per esempio la cella unitaria è un parallelepipedo oppure un cilindro a base esagonale). Oppure se ci sono due (o più) tipi di punti materiali con masse diverse disposti regolarmente sul reticolo.*

Esercizio 3.2.3. *Si mostri che le conclusioni dell'esercizio 3.2.1 valgono anche se i punti materiali sono distribuiti casualmente con una distribuzione uniforme. (Suggerimento: si usi la legge dei grandi numeri.)*

In tutti questi casi $m_\varepsilon = M_A(\#A_\varepsilon)^{-1} = \rho\varepsilon^3$, per ogni regione A sufficientemente regolare. Il numero ρ è la *densità* del solido e ha le dimensioni kg/m^3.

Si noti che la proprietà essenziale che permette di definire la densità è l'omeogenità del materiale. Questo significa assumere che la disposizione della massa è *essenzialmente* invariante per traslazioni.[4] Per capire che significa *essenzialmente* occorre una piccola digressione sulle scale della nostra descrizione del mondo. Al momento abbiamo due scale: una *microscopica* (ε) e una *macroscopica* (1), queste differiscono per vari ordini di grandezza ed è quindi naturale considerare scale intermedie (oggi molto di moda in quanto relate alle *nanotecnologie*). Tale scala è chiamata *mesoscopica* ed ha la caratteristica di essere grande dal punto di vista microscopico ma molto piccola da quello macroscopico.[5] Nel vostro caso assumeremo che tale scala sia data da ε^b per un qualche $b \in (0,1)$ (tipicamente, per semplictà $b = \frac{1}{2}$). Data una regione $A \subset \mathbb{R}^3$, $0 \in A$, con bordo regolare e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ si definisca $A_{\varepsilon,b,\boldsymbol{a}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \varepsilon^{-b}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \in A\}$. Si tratta di una copia riscalata di A traslata nel punto $\boldsymbol{a}$. La cosa interessante è che molto spesso le proprietà sulla scala mesoscopia non dipendono dai dettagli della struttura microscopica (nel nostro caso il tipo di lattice o di distribuzione, magari causale, dei punti materiali.)

Esercizio 3.2.4. *Con la notazione precedente, si mostri che per ogni scelta della struttura microscopica precedentemente discussa, detta $m(\varepsilon, \boldsymbol{a})$ la massa*

[4] Per traslazione si intende una mappa $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ del tipo $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ per qualche $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.

[5] Tipicamente questi *microscopico* e *macroscopico* differiscono di vari ordini di grandezza, ad esempio un fattore $\varepsilon = 10^8$. Mentre la scala *mesoscopica* è tale da essere difficilmente distinguibile dal punto di vista macroscopico ma molto grande da quello microscopico, ad esempio se la scala macroscopica è di ordine 1, potrebbe essere 10^{-4}.

di $A_{\varepsilon,b,\boldsymbol{a}}$ *si ha*

$$m(\varepsilon, \boldsymbol{a}) = \rho \operatorname{Vol}(A_{\varepsilon,b,\boldsymbol{a}}) + o(\varepsilon^{3b}) = \rho\varepsilon^{3b} \operatorname{Vol}(A) + o(\varepsilon^{3b}).$$

(Suggerimento: per gli argomenti precedenti dove ε *è sostituito da* ε^b *più un cambio di variable per la seconda uguaglianza.)*

Il fatto che la massa non dipenda da $\boldsymbol{a}$ esprime esattamente quello che si intende per *materiale omogeneo.*

Tuttavia i corpi che ci circondano non sono omogenei, dunque come descriverli? Una semplice possibilità è di assumere che siano *localmente omogenei.* Questo significa che

$$m(\varepsilon, \boldsymbol{a}) = \rho(\boldsymbol{a})\varepsilon^{3b} \operatorname{Vol}(A) + o(\varepsilon^{3b}).$$

con $\rho \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_{\geq 0})$. Nel seguito assumeremo che i corpi che consideriamo abbiano localmente una struttura come sopra. Dunque assumiamo che ad ogni punto $\boldsymbol{x}$ del solido sia associata una densità $\rho(\boldsymbol{x})$ e che tale densità vari in modo continuo nel solido.[6]

3.3 Forza prodotta da un corpo solido a simmetria sferica al suo esterno

Per fissare le idee, consideriamo un pianeta tale che la sua densità ρ sia sfericamente simmetrica, ovvero $\rho = \rho(\|\boldsymbol{x}\|)$. Per esprimere la forza, è conveniente scegliere le coordinate in modo che il punto materiale abbia coordinate $\boldsymbol{x} = (0, 0, R+h)$. Con le ipotesi precedenti, detto $S_\varepsilon \subset S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \|x\| \leq R\}$ l'insieme delle posizioni dei punti materiali (che sono assunti avere una distanza di ordine ε) si ha

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \sum_{\boldsymbol{z} \in S_\varepsilon} G \frac{m m_\varepsilon(\boldsymbol{z})\varepsilon^3(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|^3}.$$

Possiamo allora introdurre un reticolo di passo $\sqrt{\varepsilon}$ che consiste di un cubo di lato $\sqrt{\varepsilon}$ attorno ad ogni punto $\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^3$. Per quanto detto nella sezione precedente la massa in tale cubetto sarà data da $\rho(\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z}\|)\varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$. Dunque, ponendo $\hat{S}_\varepsilon = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^3 \ : \ \sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z} \in S\}$, poichè $h > 0$,

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \sum_{\boldsymbol{z} \in \hat{S}_\varepsilon} G \frac{m\rho(\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z}\|)\varepsilon^3(\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z}\|^3}\varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(1) \ . \tag{3.3.1}$$

[6] Questo fa parte del nostro modello di un corpo solido. Le ragioni del cambio di densità possono essere molteplici. Ad esempio il passo del reticolo può cambiare su scala mesoscopica (ad esempio a causa della pressione), oppure se si ha una mistura di due tipi di punti materiali, le cui proporzioni possono cambiare. Ovviamente si possono avere dei salti discontinui di densità (ad esempio per una transizione di fase, e.g., da acqua a ghiaccio, oppure perchè cambia il tipo di materiale, e.g. da ferro a granito). In questo caso, consistentemente con l'uso comune, interpreteremo le discontinuità come superfici di divisione tra corpi diversi.

Esercizio 3.3.1. *Si mostri che il limite* $\boldsymbol{F} = \lim_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{F}_\varepsilon$ *esiste e*

$$\boldsymbol{F} = Gm \int_S \frac{\rho(\|\boldsymbol{z}\|)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|^3} dz \ . \tag{3.3.2}$$

(Suggerimento: si riconosca che (3.3.1) *è una somma di Riemann e che la funzione integrata è continua poichè* $h > 0$*).*

Dunque, anche la forza di gravità non dipende in maniera significativa da ε, se ε è sufficientemente piccolo.

Ci proponiamo ora di calcolare l'integrale in (3.3.2).

Esercizio 3.3.2. *Si mostri, usando le coordinate sferiche, che l'integrale in* (3.3.2) *si scrive come*

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi\, \rho(r) r^2 \sin\varphi \frac{(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi - R - h)}{[r^2 - 2(R+h)r\cos\varphi + (R+h)^2]^{\frac{3}{2}}} \ . \tag{3.3.3}$$

Inoltre, si verifichi che le prime due componenti del vettore in (3.3.3) *sono nulle. (Suggerimento, si usi il teorema di Fubini e si integri in* $d\theta$*).*

Esercizio 3.3.3. *Si mostri che la terza componente che compare in* (3.3.3) *si può scrivere nel modo seguente:*

$$-\frac{4\pi}{(R+h)^2} \int_0^R dr\, r^2 \rho(r).$$

Svolgimento dell'Esercizio 3.3.3. Dapprima, si integri rispetto a θ; successivamente, si effettui la sostituzione $\eta = R + h - r\cos\varphi$; inoltre, integrando per parti, si giustifica la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
&\int_0^R dr \int_0^{\pi} d\varphi\, \rho(r) r^2 \sin\varphi \frac{r\cos\varphi - R - h}{[r^2 - 2(R+h)r\cos\varphi + (R+h)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad = 2\pi \int_0^R dr\, \frac{r\rho(r)}{R+h} \Big\{ \eta \big[r^2 + 2(R+h)\eta - (R+h)^2\big] \Big\}^{-\frac{1}{2}} \Big|_{\eta=R+h-r}^{\eta=R+h+r} \\
&\qquad - 2\pi \int_0^R dr\, \frac{r\rho(r)}{R+h} \int_{R+h-r}^{R+h+r} d\eta\, \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2(R+h)\eta - (R+h)^2}} \\
&\quad = 2\pi \int_0^R dr \frac{r\rho(r)}{R+h} \left(\frac{R+h+r}{|R+h+r|} - \frac{R+h-r}{|R+h-r|} \right) \\
&\qquad - 2\pi \int_0^R dr\, \frac{r\rho(r)}{(R+h)^2} \Big(|R+h+r| - |R+h-r| \Big) \\
&= -\frac{4\pi}{(R+h)^2} \int_0^R dr\, r^2 \rho(r) \ .
\end{aligned}$$

□

Unendo le tre affermazioni riportate negli esercizi 3.3.1–3.3.3, si ottiene che la forza è data dalla formula (scoperta, nel caso $\rho(r) = \rho$, da Newton [4, Proposizione VIII–Teorema VIII, Vol. 2])

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= Gm \int_S \frac{\rho(\|\boldsymbol{z}\|)(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|^3} dz = -\frac{Gm}{(R+h)^2} \left[4\pi \int_0^R dr\, r^2 \rho(r) \right] \boldsymbol{e}_z \\
&= -\frac{GmM_S}{(R+h)^2} \boldsymbol{e}_z \ ,
\end{aligned}
\tag{3.3.4}
$$

dove il versore $\boldsymbol{e}_z$ (nel sistema di coordinate scelto) individua la direzione congiungente il centro del pianeta (a forma sferica) con il punto materiale su cui viene esercitata la forza; inoltre, per un corpo la cui densità è a simmetria sferica, è facile calcolare che $M_S = M(S) = 4\pi \int_0^R dr\, r^2 \rho(r)$. Dunque misure gravimetriche sulla superficie non forniscono alcuna informazione sulla struttura interna del pianeta (a parte la sua eventuale simmetria sferica). L'equazione (3.3.4) ci consente di trarre una prima importantissima conclusione: il punto materiale è soggetto alla stessa forza che sentirebbe se il pianeta fosse un punto materiale di massa $M(S)$ posto al centro dello stesso.

Si noti infine che la formula non ha alcun problema per $h = 0$, questo significa che in questo caso si può tranquillamente interpretare l'integrale come un integrale improprio.

Esercizio 3.3.4. *Si studi il caso $h < 0$. (suggerimento: Si riduca il problema allo studio di un integrale improprio.)*

Vediamo infine cosa succede se abbiamo due sfere S_i, di centro C_i densità ρ_i e raggi r_i, che si attirano e i cui centri sono a distanza $r = \|C_1 - C_2\|$ e la somma dei raggi è minore di $r > r_1 + r_2$ (e dunque sono esterne l'una all'altra). Con lo stesso ragionamento fatto sopra la forza tra le due sfere è data da:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= G \int_{S_1 \times S_2} \frac{\rho_1(\|\boldsymbol{z}_1\|)\rho_2(\|\boldsymbol{z}_2\|)(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2)}{\|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2\|^3} d\boldsymbol{z}_1 d\boldsymbol{z}_2 \\
&= G \int_{S_2} d\boldsymbol{z}_2 \rho_2(\|\boldsymbol{z}_2\|) \int_{S_2} d\boldsymbol{z}_1 \frac{\rho_1(\|\boldsymbol{z}_1\|)(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2)}{\|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2\|^3} \\
&= G \int_{S_2} d\boldsymbol{z}_2 \rho_2(\|\boldsymbol{z}_2\|) \frac{M_1(C_1 - \boldsymbol{z}_2)}{\|C_1 - \boldsymbol{z}_2\|^3} \\
&= \frac{GM_1M_2(C_2 - C_1)}{r^3},
\end{aligned}
\tag{3.3.5}
$$

dove abbiamo prima usato Fubini e poi due volte l'equazione (3.3.4).

È quindi giustificato il modello in cui i pianeti sono punti materiali, persino in un caso come la terra e la luna o un satellite artificiale e la terra dove le dimensioni dei corpi non sembrano affatto trascurabili. Che dire?! Newton ha avuto fortuna.

3.4 Gravitazione univerale: di Mele e di lune

La teoria Newtoniana è spesso chiamata della gravitazione **universale**, vediamo perchè e quale sia la rilevanza di questa parola.

Prima di tutto bisogna capire il periodo storico, per dirla in una parola: i Principia di Newton sono stati pubblicati nel 1687 mentre Giordano Bruno era stato bruciato nel 1600 per avere (tra l'altro) osato negare la separazione tra cielo e terra. Sebbene nel frattempo molto fosse accaduto, l'idea che la terra e il cielo fossero due regni separati (la corruzione e la perfezione) e tra loro non ci fosse alcuno scambio (a parte l'occasionale miracolo) era ancora decisamente radicata.

Il punto della storia della mela, probabilmente apocrifa, è che incenerisce completamente questa separazione.

Per capire quanto sia rivoluzionaria questa idea, consideriamo la storiella assurda di un genio immaginario. Pensate di essere all'inizio del sedicesimo secolo e considerare il caso di una mela (terrestre e peritura) e della luna (celeste e imperitura) e osate fare, magari nel segreto della vostra stanzetta, l'ardita assunzione che su entrambe agisca la stessa forza (la gravità *universale*, appunto). Non solo ma, sulla soglia della blasfemia, assumete anche che la formula $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ sia valida, e non solo sulla terra ma anche nell' iperuranio stellato. Infine, assumete che la luna compia una orbita circolare attorno alla terra (il vostro amico Keplero vi ha detto, poco prima di morire, che è una ellisse, ma l'eccentricità e piccola per cui questo non comporta un grande errore). Ne segue che l' accelerazione deve essere uguale alla forza di gravità. Sia R il raggio dell'orbita lunare e sia la terra al centro delle coordinate, allora (scegliendo la terza coordinata perpendicolare al piano dell'orbita) si ha che l'orbita lunare è data da $\boldsymbol{r}(t) = R(\cos(2\pi T^{-1}t), \sin(2\pi T^{-1}t), 0)$, dove T è il periodo (circa 27 giorni$\sim 2.3 \cdot 10^6$ secondi). Segue che

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = -4\pi^2 RT^{-2}(\cos(2\pi T^{-1}t), \sin(2\pi T^{-1}t), 0).$$

Dalla (3.3.5) segue quindi che deve essere

$$\frac{GM_T M_L}{R^2} = 4\pi^2 M_L RT^{-2}$$

dove M_T, M_L sono la massa totale della terra e della luna, rispettivamente. Ovvero

$$GM_T = 4\pi^2 R^3 T^{-2}.$$

Veniamo alla mela. Cadendo, visto che l'altezza dell'albero è trascurabile rispetto al raggio terrestre, è sottoposta all' accelerazione

$$a = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

dove R_T è il raggio terrestre. Ovvero, se cielo e terra fossero identici, dovrebbe essere:

$$aR_T^2 = GM_T = 4\pi^2 R^3 T^{-2}.$$

Ma questa è una previsione! Quindi, da buoni scienziati, occorre fare delle misure per verificare se la previsione è corretta oppure no. Per fortuna queste misure esistono già: $a = 9.8$ m/s^2 (Galileo 1600), $R_T = 6314500$ m (Eratostene 230 a.c.), R =384.000 Km (Ipparco 200 ac).[7] Vediamo quindi che succede

$$
\begin{aligned}
&aR_T^2 \sim 9.8 \cdot (6.3 \cdot 10^6)^2 \sim 3.9 \cdot 10^{14} \\
&4\pi^2 R^3 T^{-2} = 4\pi^2 (3.8 \cdot 10^8)^3 (2.3 \cdot 10^6)^{-2} \sim 4.1 \cdot 10^{14}.
\end{aligned}
$$

Una differenza del 5% ! Considerando le approssimazioni fatte e tutti gli effetti trascurati (e.g. la terra non è esattamente sferica, l'orbita lunare non è esattamente circolare, la luna non orbita attorno alla terra ma attorno al comune centro di gravità, la gravità terrestre è modificata dalla forza centripeta dovuta alla rotazione della terra ...) si tratta di una precisione stupefacente che lascia pochi dubbi sul fatto che la terra e il cielo siano fatti della stessa pasta.

Magari siate prudenti e non andate a dirlo in giro, c'è gente dal cerino facile. Meglio aspettare qualche decennio che Newton dica la sua.

3.5 Moti centrali

Dalla sezione 3.3 abbiamo che, dati due corpi sferici di massa M e m e di centro $x, y \in \mathbb{R}^3$, rispettivamente, il potenziale è dato da

$$
U(x, y) = -\frac{GMm}{\|x - y\|}.
$$

Ne segue che le equazioni del moto sono

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x} &= -\partial_x U = \frac{GMm}{\|x - y\|^3}(x - y) \\
m\ddot{y} &= -\partial_x U = \frac{GMm}{\|x - y\|^3}(y - x).
\end{aligned}
\tag{3.5.1}
$$

Si noti che (3.5.1) corrisponde ad un sistema del primo ordine di 12 equazioni.

Come abbiamo già visto è conveniente introdurre il centro di massa $X(t) = (M + m)^{-1}[Mx(t) + my(t)]$ e la distanza tra i due corpi $z(t) = x(t) - y(t)$. In queste coordinate le (3.5.1) diventano

$$
\begin{aligned}
\ddot{X} &= 0 \\
\ddot{z} &= \frac{G\mu}{\|z\|^3} z,
\end{aligned}
\tag{3.5.2}
$$

dove $\mu = m + M$. La prima equazione da $X(t) = X(0) + \dot{X}(0)t$, ovvero il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. Rimane quindi da studiare solo

[7] Le misure riportate sono tutte errate circa del 5% che se pensate a quando sono state fatte c'è da levarsi tanto di cappello.

l'equazione in z ovvero ci siamo ridotti a studiare un sistema del primo ordine in sei equazioni.

Sia $\eta \in \mathbb{R}^3$, $\|\eta\| = 1$, tale che $\langle \eta, z(0)\rangle = \langle \eta, \dot z(0)\rangle = 0$. Detto $\xi(t) = \langle \eta, z(t)\rangle$ abbiamo

$$\ddot\xi = \frac{G\mu}{\|z\|^3}\xi.$$

Si noti che $\xi(t) = 0$ è una soluzione della equazione che soddisfa le condizioni iniziali e, per l'unicità delle soluzioni, è quindi la soluzione. Scegliendo opportunamente le coordinate possiamo quindi assumere che $\eta = e_3$, ovvero il moto avviene in un piano. In altre parole $z(t) = (\zeta(t), 0)$ con $\zeta \in \mathbb{R}^2$. Le equazioni sono quindi

$$\ddot\zeta = \frac{G\mu}{\|\zeta\|^3}\zeta, \tag{3.5.3}$$

che è equivalente ad un sistema del primo ordine in quattro equazioni.

La prossima idea è di usare le coordinate polari:

$$\zeta = rv(\theta) \tag{3.5.4}$$

dove $n(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Ponendo $n(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ si noti che

$$\ddot\zeta = \ddot r v(\theta) + 2\dot r n(\theta)\dot\theta - rv(\theta)(\dot\theta)^2 + rn(\theta)\ddot\theta.$$

Da cui segue

$$\begin{aligned} \ddot r &= -\frac{G\mu}{r^2} + r(\dot\theta)^2 \\ 0 &= r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = r^{-1}\frac{d}{dt}\left[r^2\dot\theta\right]. \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Ne segue che la quantità $\ell = r^2\dot\theta$ (detta *momento angolare*) è conservata dalla dinamica. Dunque

$$\ddot r = -\frac{G\mu}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3} \tag{3.5.6}$$

Abbiamo quindi il problema è risolto se risolviamo l'equazione per r. Ovvero ci siamo ridotti allo studio di un sistema del primo ordine in due equazioni. Assumiamo $\ell > 0$.[8] Si noti che $\dot\theta > 0$ e quindi θ è una funzione monotona di t. Possiamo quindi parametrizzare il moto con θ invece che con t. A questo scopo definiamo $u(\varphi) = \frac{1}{r(\theta^{-1}(\varphi))}$ dove θ^{-1} è la funzione inversa di $\theta(t)$. Un calcolo diretto mostra che

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}u &= -\frac{\dot r}{r^2\dot\theta} = -\frac{\dot r}{\ell} \\ \frac{d^2}{d\varphi^2}u &= -\frac{\ddot r}{\ell\dot\theta} = -\frac{r^2\ddot r}{\ell^2} = -\frac{\ddot r}{u^2\ell^2}. \end{aligned}$$

[8] Il caso $\ell = 0$ corrisponde ad un corpo che cade verso il centro lungo una retta, caso che abbiamo già discusso. Il caso $\ell < 0$ è completamente analogo ed è lasciato alla lettrice.

Sostituendo in (3.5.7) si ottiene

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}u = \frac{G\mu}{\ell^2} - u \tag{3.5.7}$$

Che, finalmente, sappiamo risolvere. Infatti la soluzione è data da

$$u(\varphi) = \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{G\mu}{\ell^2}.$$

Esercizio 3.5.1. *Si verifichi che*

$$r(\theta) = \frac{1}{e + \cos(\theta - \theta_0)}$$

è una conica.