Chapter 1

Meccanica, introduzione

1.1 Dinamica di una particella

L'inzio della meccanica moderna è segnato dalle equazioni di Newton che forniscono un modello per il moto di una particella puntiforme[1]

$$f = ma. \tag{1.1.1}$$

Vale quindi la pena di discutere un attimo sul significato di questa famosa formula.

Prima di tutto si noti che questa equazione è assunta valida solo nei *sistemi inerziali*. Un sistema inerziale è un sistema in cui, se non agiscono forze, il moto è rettilineo uniforme.

In secondo luogo l'idea di *particella puntiforme* è chiaramente una astrazione: si tratta di un modello per un corpo le cui dimensioni sono molto piccole rispetto alla scala in cui variano le forze. Si noti che questa definizione è altamente astratta in quanto nella nostra esperienza quotidiana nulla ha un moto rettilineo uniforme a meno che non vi si applichi una forza. È stato un grande merito di Galileo prima e Newton poi capire che questo è dovuto alla presenza di forze di attrito e che, in loro assenza, il moto rettilineo uniforme è il moto "naturale".

La a in (1.1.1) sta per l'accelerazione, ovvero se $x(t)$ è la posizione della particella al tempo t, allora, al tempo t, si ha $a = \ddot{x}(t)$.

Occorre poi capire cosa sono le *forze*, ovvero la lettera f nella equazione (1.1.1). Cosa sia la forza non è immediatamente chiaro. Normalmente è una funzione della posizione e, possibilmente, della velocità. Consideriamo il caso più semplice in cui è solo una funzione della posizione. Se si vuole conoscere la forza in un punto dello spazio si può misurare la *forza statica*. Che un corpo in movimento sia soggetto alla stessa forza misurata staticamente è una assunzione del modello.

[1] Ovviamente Newton non ha inventato le cose dal nulla, esisteva tutta una corrente di pensiero e una comunità il cui lavoro è stato propedeutico a Newton e senza cui Newton non avrebbe potuto ottenere i suoi impressionanti risultati. Ma questo non è un corso di storia della scienza.

Quindi, senza entrare nell'annosa questione di cosa sia una forza, possiamo accontentarci di misurarla. Per farlo abbiamo bisogno di un termine di paragone (per esempio un *dinamometro*).[2] Un esempio tipico di dinamometro è il dinamometro a molla. Questo si basa sull'osservazione che se uno tira una molla questa si allunga di una quantità e se due persone la tirano ognuno nello stesso modo allora questa si allunga del doppio.[3] Si può quindi fare un modello di molla in cui l'allungamento è proporzionale alla forza applicata (qualunque cosa essa sia). A questo punto possiamo assumere che per misurare la forza che si esercita su di un punto materiale nella posizione x possiamo fissare un capo della molla al punto x e l'altro al punto materiale. Se si assume che la forza sia circa costante in un intorno del punto x allora possiamo osservare cosa succede quando il punto si trova in equilibrio. Questo significa che la sua accelerazione è nulla e quindi, secondo l'equazione (1.1.1) deve essere $-k\ell = f(x)$, dove ℓ è l'allungamento delle molla.

È importante notare che nel ragionamento precedente abbiamo assunto che se su di un corpo agiscono due forze f_1 e f_2, allora la forza totale che agisce su di esso è data da $f_1 + f_2$. Questo può sembrare ovvio ma non lo è. Prima di tutto perchè è falso (quando le forze e le velocità delle particelle sono sufficientemente grandi) e in secondo luogo perchè anche se uno ammette, per esempio, che le forze si compongano con la regola del parallelogrammo il fatto che questa regola geometrica corrisponda all'operazione di somma è, a dir poco, sorprendente ed è una profonda manifestazione della relazione straordinaria che esiste tra due branchie della matematica che si sono sviluppate in maniera largamente indipendente: la geometria e l'algebra.

Rimane da discutere la massa. La (1.1.1) dice che l'accelerazione è proporzionale alla forza. La cosa sorprendente è che la costante di proporzionalità non dipende dal tipo di forza ma è una caratteristica del corpo che è chiamata *massa*. Inoltre, se si hanno due corpi di massa m_1 e m_2 e li si attacca tra loro con un qualcosa di massa trascurabile, se si può considerare il corpo ottenuto da tale unione come un punto materiale allora la sua massa sarà $m_1 + m_2$. Anche questa proprietà additiva della massa non è ovvia a priori, ma risulta sperimentalmente corretta nell'ambito di applicabilità della meccanica Newtoniana.

L'ultima questione che meriterebbe una discussione è cosa siano il tempo e lo spazio. Nel modello in discussione si assume che lo spazio sia $\mathbb{R}^3$, ovvero la posizione del punto materiale è data da tre coordinate (infatti, più precisiamente, assumiano che lo spazio sia lo spazio affine E_3, si veda il capitolo 7 per una discussione più accurata). Per quanto riguarda il tempo assumiano che sia rappresentato da $\mathbb{R}$, ovvero abbia una struttura d'ordine totale, e sia indipendente da tutto. Queste, nuovamente, sono assunzioni false anche se accurate nell'ambito della meccanica classica. Qui non ci addentreremo in una ulteriore discussione visto che la natura del tempo e dello spazio sono tutt'ora un mistero al centro della ricerca scientifica.

---

[2] Il nome viene dal greco $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ (dinamica) che significava forza o potenza.

[3] Ovviamente anche questa è una approssimazione, se si tira troppo la molla semplicemente si rompe.

1.2 Forze e dinamica di molte particelle

Il lettore potrebbe essere insoddisfatto dalla nostra discussione delle forze in quanto abbiamo spiegato come misurare una forza ma non cosa è. Questo non è casuale: cosa sia veramente una forza è un argomento di ricerca ancora aperto. Tuttavia ci sono alcune forze che sono ritenute *fondamenteli* e altre che sono considerate *derivate*. Tra le forze fondamentali abbiamo la forza di gravità e quella elettromagnetica. Date due particelle di massa m_1, m_2 e posizione $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$, la forza esercitata dalla particella due sulla uno è data da

$$f(x_1, x_2) = -\frac{Gm_1m_2}{\|x_1 - x_2\|^3}(x_1 - x_2),$$

dove G è una costante detta *costante di gravitazione universale*.[4]

D'altro canto date due particelle elettricamente cariche di cariche e_1, e_2 la forza elettrica esercitata dalla particella due sulla uno è data da

$$f(x_1, x_2) = \frac{Ke_1e_2}{\|x_1 - x_2\|^3}(x_1 - x_2),$$

dove K è la costante di Coulomb.[5]

Come si vede le due forze sono molto simili. Le due differenze maggiori sono che le masse sono sempre positive, $m_i \geq 0$, e quindi la forza gravitazionale è sempre attrattiva. Mentre le cariche elettriche possono essere sia positive che negative e quindi, se le particelle hanno la stessa carica, la forza è repulsiva.

L'altra differenza è che K è enormemente più grande che G. Per farsene una idea approssimativa si pensi al fatto, noto sin dall'antichità, che strofinando un pezzo di lana su di un pezzetto di ambra (in greco antico si chiamava, non a caso, $\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$ (elektron)) questa acquista la capacità di attrarre piccoli oggetti. Potete fare l'esperimento voi stessi con un pezzetto di lana, una biro e dei pezzetti di carta. Noterete che i pezzetti di carta sono attratti dalla biro, questo significa che la forza elettrica sviluppata dal piccolo sbilanciamento di cariche indotto dallo strofinamento tra la biro e la lana è più forte della forza di gravità terrestre che è l'effetto combinato di tutti gli atomi della terra sul pezzetto di carta.

Vi potreste chiedere: se la forza elettrica è così forte come mai non ne sentiamo gli effetti. La ragione è che le cariche positive e quelle negative sono quasi esattamente nello stesso numero e quindi la materia è quasi neutra. Ne parleremo nuovamente più avanti.

In natura sappiamo esistere altre due forze fondamentali: la forza *debole* responsabile del decadimento radioattivo e la forza *forte* che permette l'esistenza dei nuclei degli atomi. Tuttavia queste forze agiscono solo distanze molto piccole, dell'ordine dell'atomo, e non hanno quindi effetti direttamente percepibili nella scala spazio-temporare in cui viviamo. Per altro la loro descrizione richiede strumenti matematici abbastanza sofisticati, quindi, nel seguito, le ignoreremo.

[4] Il suo valore approssimato è $G = 6.6743 \cdot 10^{-11} m^3\, kg^{-1} s^{-2}$.
[5] Il suo valore approssimato è $K = 8.9875 \cdot 10^9 m^3\, kg\, s^{-4} A^{-2}$.

Esempi di forze derivate sono l'attrito che modella l'effetto dell'interazione di un corpo con gli atomi di cui è costituito il mezzo in cui il corpo si muove. Oppure la forza elastica che è un effetto delle proprietà delle molecole che costituiscono un corpo. Oppure, similmente all'attrito, la viscosità in un fluido.

Se invece di una sola particella se ne hanno N la cui posizione è data da $\{x_i\}_{i=1}^N$, con $x_i \in \mathbb{R}^3$, e di massa $\{m_i\}_{i=1}^N$, che sono sottoposte ad una forza esterna F e tali che tra ogni coppia di particelle i, j esiste una forza $f_{ij}(x_i, x_j)$, come si scrivono le equazioni del moto? Abbiamo visto che la risposta (data da Newton) è che le forze si sommano linearmente, ovvero

$$m_i\ddot{x}_i = F(x_i) + \sum_{j\neq i} f_{ij}(x_i, x_j).$$

Abbiamo così ottentuo un sistema di $3N$ equazioni differenziali del secondo ordine. Sembra quindi necessario cominciare lo studio della dinamica con un piccolo riassunto di alcuni fatti sulle equazioni differenziale che ci serviranno nel seguito. Ma prima di fare ciò, discutiamo un attimo del fatto che le equazioni di Newton non sono valide in sistemi non *inerziali*.

1.3 Moto locale sulla superficie terrestre

Per dare una prima una idea della differenza tra le equazioni del moto nei sistemi inerziali e il caso generale discutiamo brevemente il moto sulla superficie terrestre. Questo è un assaggio della teoria generale che sarà sviluppata nel Capitolo 7.

Sia $z \in \mathbb{R}^3$ una particella che si muove sulla superficie terrestre senza essere sotto l'influenza di una forza esterna. Con questo vogliamo dire: nessuna forza esterna a parte quelle che mantengono la particella sulla superficie terrestre. Infatti una particella sulla superficie terrestre è sempre sottoposta ad almeno due forze: la forza di gravità, e una forza esercitata dal pavimento che permette alla particella di non sprofondare nella terra. Questo significa che le equazioni di Newton hanno la forma

$$m\ddot{z} = f \tag{1.3.1}$$

dove f è una forza che ha il solo effetto di mantenere la particella sulla superifice terrestre. La forma della terra è chiamata *geoide* e differisce da un *ellissiode* per i dettagli locali (montagne, mari, coposizione disomognea della terra etc.). L'ellissiode che descrive il comportamento medio della superficie terrestre differisce da una sfera, di raggio $r_T = 6371$ km, per lo schiacciamento ai poli, ma si tratta di un effetto non grande, circa il 3 per mille. Una ragionevole approssimazione è considerare la forma della terra some una superficie di rivoluzione attorno all'asse nord-sud. Possiamo quindi descriverla in coodinate polari come

$$S(\theta, \varphi) = r(\varphi)(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi) =: r(\varphi)n(\theta, \varphi),$$

con $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ and $\theta \in [0, 2\pi)$.[6] Per esempio, $r = r_T(1 + e(\sin\varphi)^2)^{-1}$ con

[6] Spesso le coordinate polari si scrivono come $r(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$ with $\varphi \in [0, \pi]$, ma qui adottiamo l'uso geografico.

$e = 3 \cdot 10^{-3}$, sarebbe una buona approssimazione. Il piano tangente è descritto dai vettori

$$\begin{aligned}\partial_\theta S &= r(\varphi)(-\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0) =: r(\varphi)v(\theta)\cos\varphi \\ \partial_\varphi S &= r(\varphi)(-\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi) + r'(\varphi)n(\theta,\varphi) \\ &=: r(\varphi)w(\theta,\varphi) + r'(\varphi)n(\theta,\varphi).\end{aligned}$$

Ne segue che il vettore ortonormale alla superficie terrestre è dato da[7]

$$\begin{aligned}\eta &= (1+\alpha(\varphi)^2)^{-\frac{1}{2}}\left[n(\theta,\varphi) - \alpha(\varphi)w(\theta,\varphi)\right] \\ \alpha(\varphi) &= \frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)}.\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Se definiamo $\tilde{w}(\theta,\varphi) = w(\theta,\varphi) + \alpha(\varphi)n(\theta,\varphi)$, e $\hat{w} = (1+\alpha(\varphi)^2)^{-\frac{1}{2}}\tilde{w}$, allora $\{\eta, v, \hat{w}\}$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, e lo span di $\{v, \hat{w}\}$ forma lo spazio tangente ad ogni punto della superficie (si verifichi che $\langle v, n\rangle = \langle v, w\rangle = 0$).

Il fatto che la particella sta sulla superfice terrestre implica che a tutti i tempi $z(t) = r(\varphi(t))n(\theta(t), \varphi(t))$. Per procedere occorre calcolare $\ddot{z}$ nelle coordinate θ, φ.

$$\begin{aligned}\dot{z} &= r'n\dot{\varphi} + rw\dot{\varphi} + rv\dot{\theta}\cos\varphi \\ \ddot{z} &= r''n\dot{\varphi}^2 + 2r'v\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + r'n\ddot{\varphi} + r\partial_\theta v\dot{\theta}^2\cos\varphi - rv\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ &\quad + rv\ddot{\theta}\cos\varphi + 2r'w\dot{\varphi}^2 + r\partial_\theta w\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\partial_\varphi w\dot{\varphi}^2 + rw\ddot{\varphi}.\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Qui ci limitiamo a studiare il caso in cui il moto della particella avviene su di una scala molto più piccola del raggio terrestre e a medie latitudini. In altre parole $\theta(t) = \theta_0 - \omega t + \vartheta(t)$ e $\varphi(t) = \varphi_0 + \phi(t)$, $|\varphi_0| > .5$, dove $\omega \sim 7 \cdot 10^{-5}$ radianti per secondi^{-1} rappresenta la rotazione terrestre[8] sul suo asse e ϑ, ϕ rappresentano la piccola scala su cui avviene il moto.

Per uso futuro, si verifichi che

$$\begin{aligned}&\langle v, \partial_\theta v\rangle = 0 \\ &\langle v, \partial_\theta w\rangle = -\langle w, \partial_\theta v\rangle = -\sin\varphi \\ &\langle v, \partial_\varphi w\rangle = -\langle w, \partial_\varphi v\rangle = 0 \\ &\langle \partial_\theta v, n\rangle = -\cos\varphi \\ &\langle n, \partial_\theta w\rangle = 0 \\ &\langle n, \partial_\varphi w\rangle = -1.\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Rimane da determinare la f in (1.3.1). Come abbiamo detto, la forza consta di due parti: un forza gravitazionale f_g e una reazione vincolare f_v che ha il solo effetto di mantenere la particella sulla superfice terrestre e quindi ha la forma $f_v = \kappa\eta$.

[7] Si verifichi che $\|\eta\| = 1$ e $\langle \eta, v\rangle = \langle \eta, w + \alpha n\rangle = 0$.

[8] Il segno meno dipende dal fatto che la terra ruota, nelle nostre coordinate, in senso antiorario.

Ora che abbiamo una espressione dello spostamento nelle coordiante che ci interessano e sappiamo quanto vale la forza, possiamo studiare la(1.3.1). Moltiplicando (1.3.1) per η, v e $\tilde{w} = w + \alpha(\varphi)n$, e usando (1.3.3), si ottiene

$$\begin{aligned}
&m\langle \eta, \ddot{z} \rangle = \kappa + \langle \eta, f_g \rangle \\
&m(2r'\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi - 2r\sin\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\ddot{\theta}\cos\varphi) = \langle v, f_g \rangle \\
&m(2r'\dot{\varphi}^2 + r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2 + r\ddot{\varphi}) + m\alpha\Big(r''\dot{\varphi}^2 + r'\ddot{\varphi} + \\
&\quad - r(\cos\varphi)^2\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\Big) = \langle \tilde{w}, f_g \rangle.
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

La prima equazione semplicemente definisce κ, quindi possiamo ignorarla. Per determinare f_g si noti che se un punto materiale è fermo sulla superficie terrestre, rimane fermo.[9] Questo significa che $\ddot{\vartheta}(t) = \dot{\vartheta}(t) = \ddot{\phi}(t) = \dot{\varphi}(t) = 0$ è una soluzione delle equazioni del moto, quindi[10]

$$\begin{aligned}
&\langle v, f_g \rangle = 0 \\
&\langle \tilde{w}, f_g \rangle = mr\omega^2 \left[\sin\varphi\cos\varphi - \alpha(\cos\varphi)^2\right].
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Da cui segue che, nelle coordinate ϑ, ϕ, le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned}
&r\ddot{\vartheta}\cos\varphi = -2r'(\dot{\vartheta} - \omega)\dot{\phi}\cos\varphi + 2r\sin\varphi(\dot{\vartheta} - \omega)\dot{\phi} \\
&r\left(1 + \frac{(r')^2}{r^2}\right)\ddot{\phi} = -2r'\dot{\phi}^2 - r\sin\varphi\cos\varphi(\dot{\vartheta}^2 - 2\omega\dot{\vartheta}) - \frac{r''r'}{r}\dot{\phi}^2 \\
&\qquad + r'(\cos\varphi)^2(\dot{\vartheta}^2 - 2\omega\dot{\vartheta}) + r'\dot{\phi}^2.
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Se vogliamo descrivere il moto visto da una persona che si trova nel punto $S(\theta_0 - \omega t, \varphi_0)$ e che avviene su di una scala molto piccola rispetto al raggio terrestre, è naturale usare le coordinate $(\xi_1, \xi_2) = r(\varphi_0)(\vartheta\cos\varphi_0, \phi\sqrt{1 + \alpha(\varphi_0)^2})$. Poiché

$$\begin{aligned}
S(\theta_0 - \omega t + \vartheta(t), \varphi_0 + \phi(t)) - S(\theta_0 - \omega t, \varphi_0) &= \xi_1(t)v(\theta_0 - \omega t) \\
&\quad + \hat{w}(\theta_0 - \omega t, \varphi_0)\xi_2(t) + \mathcal{O}(r^{-1}\|\xi\|^2)
\end{aligned}$$

ne segue che tali coordinate sono approssimativamente cartesiane. Inoltre se $\|\xi\| \le 100$ m, $\|\dot{\xi}\| \le 10$m/s, e $\|\ddot{\xi}\| \le 10$ m/s^2. Allora $|\phi| + |\vartheta| \le 10^{-4}$, $|\dot{\phi}| + |\dot{\vartheta}| \le 10^{-5}$ e $|\ddot{\phi}| + |\ddot{\vartheta}| \le 10^{-5}$ che permette di scrivere

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}_1 &= -2\omega\sin\varphi_0\xi_2 + \mathcal{O}(10^{-5}) \\
\ddot{\xi}_2 &= 2\omega\sin\varphi_0\xi_1 + \mathcal{O}(10^{-5}),
\end{aligned}$$

[9] Infatti se il punto fa parte della supeficie terrestre questa è in equlibrio e quindi non si muove.

[10] Quello che stiamo facendo con questo argomento è semplicemente misurare la forza nel caso statico.

ovvero

$$m\ddot{\xi} = -2m \sin \varphi_0 \omega J \dot{\xi} + \mathcal{O}(10^{-5}), \tag{1.3.8}$$

dove abbiamo introdotto la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si noti che per le velocità considerate $\omega\|\dot{\xi}\| \sim 10^{-3}$, dunque l'errore è assai più piccolo del termine che abbiamo calcolato.

Si noti che il segno di $\sin \varphi_0$ cambia a seconda dell'emisfero in cui ci si trova ed è nullo sia ai poli che all'equatore.

Vediamo quindi che nel sistema di riferemento, non inerziale, solidale con la terra il moto avviene come se ci fossero una forza aggiuntiva (oltre alla forza di gravità e alla reazione vincolare che manditene il corpo sulla superficie terrestre impedendendogli di sprofondare): la forza detta di Coriolis

$$F_C = -2m \sin \varphi_0 \omega J \dot{\xi}$$

perpendicolare alla direzione del moto in senso antiorario nell'emisfero nord e in senso orario nell'emisfero sud.

Commento 1.3.1. *Riassumiamo quello che abbiamo fatto: abbiamo usato la velocità angolare dalla terra (ovvero che il giorno dura 24 ore). Una stima approssimata del raggio terrestre (molto peggiore di quella ottenuta da Eratostene circa 2200 anni fa in Alessandria).*[11] *La legge di Newton sul moto nei sistemi di riferimento inerziali pubblicata da Newton nei suoi* The Principia: mathematical principles of natural philosophy, *[4], nel 1687. Infine abbiamo usato la assunzione che la reazione vincolare è perpendicolare alla superficie terrestre. Come vedremo questo è un caso speciale del concetto di vincolo, adombrato almeno da Galileo ma sistematizzato da Johann Bernoulli e D'Alembert nella prima metà del 1700.*

Usando questi ingredienti abbiamo costruito un modello matematico e, studiandolo, abbiamo scoperto l'esistenza della forza *di Coriolis che implica che il moto sulla superficie terrestre non è rettilineo e, con un poco più di lavoro, spiega, per esempio, il senso di rotazione degli uragani.*

Esercizio 1.3.2. *Si verifichi che, per ogni $\rho > 0, \alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \rho(\cos \theta(t+\alpha), \sin \theta(t+\alpha)), \\ \theta(t) &= -\frac{\omega \sin 2\varphi_0}{\cos \varphi_0} t, \end{aligned}$$

è una soluzione di $m\ddot{\xi} = -2m \sin \varphi_0 \omega J \dot{\xi}$.

[11] Sfortunatamente solo pochi frammenti sono sopravvissuti del trattato *Geographika* di Eratostone, quindi ci dobbiamo basare su fonti secondarie per la ricostruzione dei suoi risultati e metodi.

Esercizio 1.3.3. *Si stimi la forma della terra assumento che sia liquida, la superficie sia in equilibrio e la forza di gravità sia data da* $-mg\,n(\theta,\varphi)$*, con* $g = 9.8ms^{-2}$*.*[12] *(Suggerimento: si ottenga una equazione differenziale per* r *e la si approssimi con una che si sa risolvere.)*

Esercizio 1.3.4. *Si veda cosa producono le equazioni precedenti in casi diversi (vicino ai poli, ad alte velocità, su grandi scale etc...).*

Esercizio 1.3.5. *Si studi lo stesso problema per un proiettile.*

Commento 1.3.6. *Si noti l'importanza delle assunzioni che si fanno in un modello: poichè ogni modello è approssimato, se ci si dimentica del dominio di valità del modello si rischia di calcolare un effetto più piccolo della precisione del modello, e quindi assolutamente non indicativo del fenomeno che si sta descrivendo.*

La lettrice potrebbe, giustamente, essere insoddisfatta per la deduzione delle equazione del moto che coinvolge un mucchio di calcoli algebrici poco trasparenti e sembra non ovvia da generalizzare. Una deduzione più concettuale e generale è possibile ma richiede un alcune considerazioni teoriche preliminari. Il lettore curioso può andare direttamente alla sezione 7. Tuttavia la deduzione precedente è istruttiva in quanto mostra come sia possibile cercare di risolvere un problema usando la forza bruta, senza sviluppare una teoria e una comprensione generale, ma spesso questa strada, seppur percorribile, è assai faticosa.

[12] Come vedremo in seguito, la forza di gravità è diretta verso il centro della terra se la terra è sferica. Nel caso della terra questa ipotesi è incorretta. Tutavia, come prima approssimazione, vale la pena di esplorarla.